

Absteckung und Berichtigung von Gleisbogen.

Relativbildverfahren und seine Anwendung für das Abstecken und Berichtigen von Gleisbogen.

Von Dipl.-Ing. Kasimir Szmodits, Oberbaurat der königl. ungar. Staatseisenbahnen, Budapest.

Hierzu Tafel 17.

Inhalt:

1. Einleitung.
- I. Bogenabsteckung mit gegebenem Halbmesser.
 2. Wahl, Aufmessen und Aufzeichnen des Standvielecks.
 3. Der Verschiebungsplan.
 4. Absteckplan eines Bogens mit gegebenem Halbmesser.
 5. Differenzgleichungen der Bogenabsteckung.
 6. Das Integral der Differenzgleichungen.
 7. Regelmäßiges Standvieleck.
 8. Der Übergangsbogen.
 9. Erstes Zahlenbeispiel.
- II. Bogenabsteckung mit Nebenbedingungen.
 10. Verbesserung des Bogenhalbmessers.
 11. Berichtigung eines vorhandenen Bogens.
 12. Zweites Zahlenbeispiel.
 13. Korbbogen.
- III. Anhang.
 14. Differenzialgleichungen der Bogenabsteckung.
 15. Kritische Bemerkungen über einige Annäherungsverfahren.
 16. Die Rolle des relativen Bildes in der graphischen Integration der Differenzialgleichungen.
 17. Schlußwort.

1. Einleitung.

Die zum Abstecken und Berichtigen von Gleisbogen dienenden, bekannten Verfahren führen entweder nur auf einem unbequemen Wege zum Ziel oder sie entsprechen bezüglich der Genauigkeit nicht den Anforderungen der mathematischen Analysis.

In der Koordinaten-Geometrie erfordert die Lösung der Aufgabe langwierige Berechnungen, deren Unbequemlichkeit noch dadurch erhöht wird, daß im Laufe der Arbeit viele, nur vorübergehend Bedeutung besitzende Hilfsgrößen zahlenmäßig berechnet werden müssen. Diese Zahlenwerte, wie beispielsweise die Koordinaten einzelner Bogenpunkte oder der Bogenmittelpunkte, sind gewöhnlich so groß, daß ihre zahlenmäßige Bestimmung an sich schon viel Aufmerksamkeit und auf viele Zahlenstellen sich erstreckende Genauigkeit erheischt. Außerdem fehlt oft auch die während der Arbeit so wichtige Übersichtlichkeit und Voraussicht, ohne die man kaum beurteilen kann, wohin die Rechnungen führen. Die auf der Ausgleichung von Pfeilhöhendifferenzen beruhenden Verfahren — deren Entdeckung an die Namen Nalenz und Lefort gebunden ist, und die bei den verschiedenen Bahnen in verschiedenen Formen angewandt werden*) — sind zwar frei von derartigen Rechnungsschwierigkeiten, können aber dennoch beanstandet

*) Max Höfer: Die Absteckung von Gleisbogen aus Evolventenunterschieden. Berlin: Julius Springer 1927. — Dr. Ing. Gerhard Schramm: Allgemeine Theorie des Nalenz-Höfer-Verfahrens, Org. Fortsch. Eisenbahnwes. 1934, H. 16. — J. Chappellet: Méthodes de rectification du tracé des courbes de chemin de fer par correction des fleches. Paris: Léon Eyrolles 1926. — Charles H. Bartlett: String Lining of Curves Made Easy, Rly. Engr. and Maintn. Engng. 1928, Vol. 24, No 1, 2, 4, 5, 6.

werden aus dem Grunde, daß sie zur Absteckung des Bogens nur angenäherte Daten liefern. Diese Verfahren entsprechen den analytischen Bedingungen der Annäherung nur dann, wenn der Zentriwinkel des zu berichtenden Bogens nicht zu groß ist, und daß auch die zur richtigen Lage führenden Verschiebungen gering sind. Bei größerem Zentriwinkel und bei größeren Verschiebungen kann man von diesen Verfahren nur dann befriedigende Ergebnisse erwarten, wenn man das Berichtigungsverfahren noch ein- bis zweimal wiederholt.

Zur Vermeidung dieser Nachteile und Unvollkommenheiten leiten wir zur Lösung des Problems der Bogenabsteckung neue Gleichungen ab. Diese Gleichungen stellen die Aufgabe in eine ganz neue Beleuchtung, und sichern ihr nebst einer vollkommenen Lösung auch eine bequeme Berechnung der Absteckgrößen. Unser, auf diesen Gleichungen beruhendes Verfahren ist im allgemeinen durch Einfachheit und Übersichtlichkeit gekennzeichnet, es kann in den verwickeltsten Fällen der Bogenabsteckung mit Vorteil sowohl zeichnerisch wie auch rechnerisch durchgeführt werden. Aus unseren Gleichungen ergibt sich auch die Grundgleichung der erwähnten Verfahren (Nalenz, Lefort u. a.), was wir im Anhang unserer Arbeit auch darlegen werden. Dortselbst werden wir noch auf die Fehler dieser Verfahren des näheren eingehen und auch auf die weitreichenden mathematischen Beziehungen unseres Verfahrens hinweisen.

I. Bogenabsteckung mit gegebenem Halbmesser.

2. Wahl, Aufmessen und Aufzeichnen des Standvielecks.

Die Aufgabe der Bogenabsteckung stellen wir folgenderweise dar. Gegeben sind im Gelände zwei Gerade, zwischen denen als Endtangente einzelne Punkte der Achse eines regelmäßigen Gleisbogens mit gegebenem oder gewissen Bedingungen entsprechendem Halbmesser abzustecken sind.

Zur ersten Annäherung dieses Bogens stecken wir zwischen den gegebenen Geraden einen aus Geradenstücken bestehenden Linienzug, ein offenes Vieleck ab, das dem abzusteckenden Bogen schätzungsweise möglich nahe kommt, und dessen äußere Seiten mit den Tangenten des Bogens zusammenfallen oder mit ihnen parallel laufen. Dieses Vieleck nennt man das Standvieleck, und von diesem aus wollen wir die Bogenachse abstecken. Damit das Standvieleck auch mit stetigen Kurven leicht in Verbindung gebracht werden könne, betrachten wir es als das umhüllende Vieleck einer stetigen Kurve, der sogenannten Standkurve. Die Tangentenpunkte dieser Kurve nimmt man nach Belieben an, am bequemsten aber in den Halbierungspunkten der Seiten des Standvielecks. Sind die Seiten des Standvielecks untereinander gleich, so sind auch die Tangentenabschnitte gleich, wodurch die Standkurve als eine solche Korblinie aufgefaßt werden kann, deren einzelne Kreisbogen in den Halbierungspunkten der einzelnen Seiten sich berührend aneinanderschließen.

Die einzelnen Seiten und Winkel des Standvielecks können im allgemeinen beliebig angenommen werden. Jedoch können gewisse Vereinfachungen ermöglicht werden, wenn entweder

die Seiten oder die Winkel des Standvielecks, womöglich bei günstigen Geländebeziehungen sowohl die Seiten als auch die Winkel für sich gleichgroß genommen werden. Eine solche Vereinfachung ist auch die Einführung des Korbbogens als Standkurve, was durch die Gleichheit der Seiten ermöglicht wurde. Im nachstehenden gebrauchen wir diese Aufnahmestellungen wechselweise. Zunächst aber nehmen wir die Seiten vor der Wahrung des Allgemeinen gleichgroß an. Später werden wir gelegentlich auf jene Vorteile hinweisen, die aus der Anwendung gleicher Seiten oder gleicher Winkel entstehen. Schon hier sei aber bemerkt, daß es bei der Berichtigung eines vorhandenen Bogens wünschenswert erscheint, einerseits die Seiten zwecks bequemer Aufmessung gleichgroß zu wählen, andererseits die Eckpunkte zwecks Ausschaltung der Terrainschwierigkeiten am inneren Rande der äußeren Schiene aufzunehmen, wie dies auch die in der Einleitung erwähnten Verfahren tun.

Man wähle die Seiten des Standvielecks, von denen aus je ein Punkt des neuen Bogens abgesteckt wird, weder zu groß noch zu klein, und zwar deshalb, weil dadurch der abzusteckende Bogen entweder nur durch zu wenige, voneinander weit

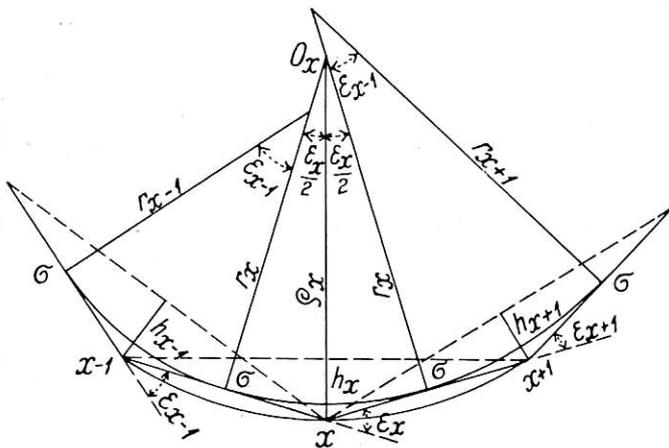


Abb. 1. Das Standvieleck und die Pfeilhöhen.

entfernte Punkte bestimmt wäre, oder weil sich andererseits die Arbeit der Absteckung zu mühselig gestalten würde. Allerdings entsteht daraus, daß die Winkel des Standvielecks klein sind, ein gewisser rechnerischer Vorteil, weil die Potenzreihen der Winkelfunktionen solcher Winkel mit genügender Genauigkeit nach dem ersten oder zweiten Gliede abgebrochen werden können. All diesen Forderungen kann Genüge geleistet werden, wenn man die Länge der Seiten des Standvielecks auf 3 bis 5% des Halbmessers des abzusteckenden Bogens festsetzt. Es entsteht aber kein Nachteil dadurch, daß wir die Seiten größer wählen, weil die Punkte des neuen Bogens nachträglich durch Einschaltung neuer Kreispunkte leicht vermehrt werden können.

Die Eckpunkte des Standvielecks bezeichnen wir mit den Zahlen 0, 1, ..., x, x + 1, ..., n, n + 1, die Ergänzungswinkel in den einzelnen Eckpunkten mit ϵ_x , die Länge ihrer Seiten zwischen den Eckpunkten x und x + 1 aber allgemein mit $\sigma_{x+\frac{1}{2}}$. In der Abb. 1 und 2 aber nahmen wir die Seiten des Standvielecks einheitlich mit σ bezeichnet gleichgroß an. Abb. 1 zeigt die Seiten, Winkel und Krümmungsverhältnisse des Standvielecks in der Umgebung des Eckpunktes x. ρ_x ist der Halbmesser des durch die Eckpunkte x-1, x, x + 1 gehenden, r_x aber des zwei benachbarte Seiten berührenden Kreises. Die Berührungspunkte des Kreises r_x liegen in den mit $x - \frac{1}{2}$ und $x + \frac{1}{2}$ bezeichneten Seitenmittelpunkten. Die Kreisbogen r_x , $x = 1, \dots, n$, geben jene Korblinie, die als Standkurve der Absteckung aufgefaßt wird.

Die Winkel ϵ_x , $x = 1, \dots, n$, werden in gebräuchlicher Weise entweder unmittelbar mit dem Meßinstrument gemessen, oder nach den in der Einleitung erwähnten Verfahren durch die Pfeilhöhen des Bogens, worunter die Höhen der gleichschenkligen Dreiecke $[x - 1, x, x + 1]$ zu verstehen sind. Pfeilhöhen messen wir natürlich nur dann, wenn die Seiten des Standvielecks gleichgroß sind.

Die in Punkt x gemessene Pfeilhöhe h_x bestimmt zufolge der aus geometrischen Zusammenhängen entspringenden Gleichung

$$\sin \frac{\epsilon_x}{2} = \frac{h_x}{\sigma} = \frac{\sigma}{2 \rho_x} \dots \dots \dots 1)$$

die Krümmung des Kreises ρ_x und den Winkel ϵ_x völlig. Die Krümmung ergibt sich aus Gl. 1) in folgender Gestalt:

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{2 h_x}{\sigma^2} \dots \dots \dots 2).$$

Die Krümmung ist also mit der Pfeilhöhe proportional. Der Winkel wird nach Reihenentwicklung des Ausdruckes $\arcsin h_x/\sigma$

$$\epsilon_x = \frac{2 h_x}{\sigma} + \frac{1}{3} \left(\frac{h_x}{\sigma} \right)^3 + \dots \dots \dots 3)$$

sein. Ist ϵ_x klein, so kann die auf der rechten Seite der Gl. 3) stehende Reihe nach dem ersten oder zweiten Glied abgeschlossen werden. Schon das zweite Glied ist sehr klein, wenn σ unter der oben eingeführten Wertgrenze bleibt. Die Krümmung der Standkurve ist als reziproker Wert von

$$r_x = \rho_x \cdot \cos \frac{\epsilon_x}{2} \text{ zu rechnen. Durch Reihenentwicklung erhalten wir}$$

$$\frac{1}{r_x} = \frac{2 h_x}{\sigma^2} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h_x}{\sigma} \right)^2 + \dots \right] \dots \dots \dots 4).$$

Bei kleinen ϵ_x kann die in Eckklammer stehende Reihe mit dem zweiten Gliede abgeschlossen werden.

Den Winkel, den die Seite $[x, x + 1]$ des Standvielecks mit der ersten Seite $[0,1]$ einschließt, bezeichnen wir mit $\tau_{x+\frac{1}{2}}$. Wir erhalten ihn, wenn wir die Ergänzungswinkel ϵ_x von ϵ_1 bis ϵ_x summieren. Es ist also

$$\tau_{x+\frac{1}{2}} = \sum \epsilon_x \dots \dots \dots 5).$$

Dehnt man die Summierung auf sämtliche Ergänzungswinkel ϵ_x aus, so gewinnen wir den Neigungswinkel α der Endtangente (Abb. 2).

Um das Aufzeichnen des Standvielecks zu erleichtern, bilden wir vorher ein Richtungsbüschel, dessen Richtlinien mit den einzelnen Seiten des Standvielecks parallel sind (Abb. 2a). Zu diesem Zwecke tragen wir von einem Punkte O einer zur Anfangstangente parallelen Linie aus der Reihe nach sämtliche Winkel ϵ_x auf, wodurch ihre Summe der Gl. 5) entsprechend entsteht. Werden anstatt der Winkel Pfeilhöhen gemessen, so tragen wir am Umfange eines Kreises mit dem Halbmesser σ die zweifachen Pfeilhöhen $2 h_x$ als Sehnen nacheinander auf (Abb. 2a). Die so gewonnenen Teilungspunkte mit dem Mittelpunkt des Kreises σ geben die einzelnen Richtlinien des Richtungsbüschels, mit deren Hilfe das Standvieleck schon leicht aufgezeichnet werden kann.

Zu den Abb. 2a und 2b sei bemerkt, daß unter ihnen derselbe Zusammenhang besteht, wie zwischen einem Vektorenvieleck und dem dazu gehörigen Seilvieleck. Das Standvieleck kann somit derart aufgefaßt werden, wie das Seileck der Pfeilhöhen, wenn wir die Pfeilhöhen in ihrer wirklichen Lage als Kräfte betrachten, die nach Richtung und Größe gegeben sind.

Könnte man die Abb. 2b in einem genügend großen Maßstabe herstellen, so wäre darin ergänzend nur noch der geplante neue Bogen zu konstruieren, damit uns ein entsprechender Bogenabsteckplan zur Verfügung stünde, aus dem die Ab-

stände der Einzelpunkte des abzusteckenden Bogens vom Standvieleck unmittelbar entnommen werden könnten. Bedauerlicherweise aber ist dies infolge des großen Umfanges des Bogens nicht möglich, weil man die erwähnten Abstände bei den anwendbaren Maßstäben selbst nicht annähernd feststellen kann. Um diese Schwierigkeit umgehen zu können, beleuchten wir die gegenseitige Lage des Standvielecks und des abzusteckenden Bogens mit einer anderen Methode, und zwar einem Verschiebungsplane, der das unmittelbare Abgreifen der einzelnen Distanzen ermöglicht.

Der Lageplan des Standvielecks wird nur dazu dienen, um auf diesem einerseits die Endtangenteabschnitte der Standkurve annähernd bestimmen, andererseits die Abstände des abzusteckenden Bogens von dem Standvieleck zwecks Absteckung aufzeichnen zu können. Ist die angenäherte Bestimmung einzelner Maße in gegebenem Falle nicht nötig, so kann der Lageplan weggelassen, und zwecks Zusammenstellung und Sicherung der Absteckungsmaße eine einfachere Abbildung, das in einer geraden Linie entwickelte Bild des Standvielecks gebraucht werden.

3. Der Verschiebungsplan.

Das Problem der Bogenabsteckung kann im allgemeinen als gelöst betrachtet werden, wenn wir jene gegenseitigen Verschiebungen herstellen können, die zwischen den einander zugeordneten Punkten zweier Kurven, des abzusteckenden Bogens und der Standkurve, bestehen. Diese nach Richtung und Größe anzugebenden Verschiebungen bestimmen die eine Kurve aus der anderen eindeutig.

Zwischen den Punkten beider Kurven kann eine sehr einfache und für unsere Zwecke besonders geeignete Verbindung dadurch hergestellt werden, daß wir die parallelen Tangenten und deren Berührungspunkte beider Kurven einander zuordnen. Zwecks Ausgestaltung dieser Verbindung gehen wir vom Standvieleck aus, an dessen Seiten wir die Berührungspunkte der Standkurve schon angenommen haben. Denken wir uns ein mit diesem Vielecke paralleles, umhüllendes Vieleck auch neben den abzusteckenden Bogen gelegt, und stellen wir auch an seinen Seiten die Berührungspunkte fest. Dieses Vieleck wollen wir im nachstehenden das Bogenvieleck nennen. Die Berührungspunkte des Bogenvielecks entsprechen den Berührungspunkten des Standvielecks. Unsere nächste Aufgabe besteht darin, die gegenseitigen Verschiebungen der entsprechenden Punkte herzustellen.

In Abb. 3 stellt A einen Teil des Standvielecks, B aber denselben des mit jenen parallelen Bogenvielecks in der Umgebung des x-ten Eckpunktes dar. $A_{x-1}, A_x; B_{x-1}, B_x$ bezeichnen Eckpunkte, $A_{x-\frac{1}{2}}, A_{x+\frac{1}{2}}; B_{x-\frac{1}{2}}, B_{x+\frac{1}{2}}$ aber Berührungspunkte. Diese Punkte werden wir sonst bei der Anwendung nur mit den Ziffern der Zeiger bezeichnen. Die in den Berührungspunkten errichteten Normalen schließen miteinander den Neigungswinkel ϵ_x ein, und die entsprechenden Normalen beider Vielecke sind einander parallel. M_x ist der Schnittpunkt der Normalen vom Standvieleck, N_x aber derselbe vom Bogenvieleck.

Die im x-ten Eckpunkte sich treffenden Tangentenabschnitte sind $\overline{A_{x-\frac{1}{2}}A_x} = a_x^A$ und $\overline{A_xA_{x+\frac{1}{2}}} = b_x^A$ bzw. $\overline{B_{x-\frac{1}{2}}B_x} =$

$= a_x^B$ und $\overline{B_xB_{x+\frac{1}{2}}} = b_x^B$, in deren abgekürzter Bezeichnung (a_x^A, \dots) wir den oberen Zeiger nur dann ausschreiben werden, wenn das Weglassen desselben zu Irrtümern führen könnte. Die Seiten der Vielecke bezeichnen wir zwischen dem (x-1)-ten und x-ten Eckpunkte allgemein mit $\sigma_{x-\frac{1}{2}}$; wollen wir aber

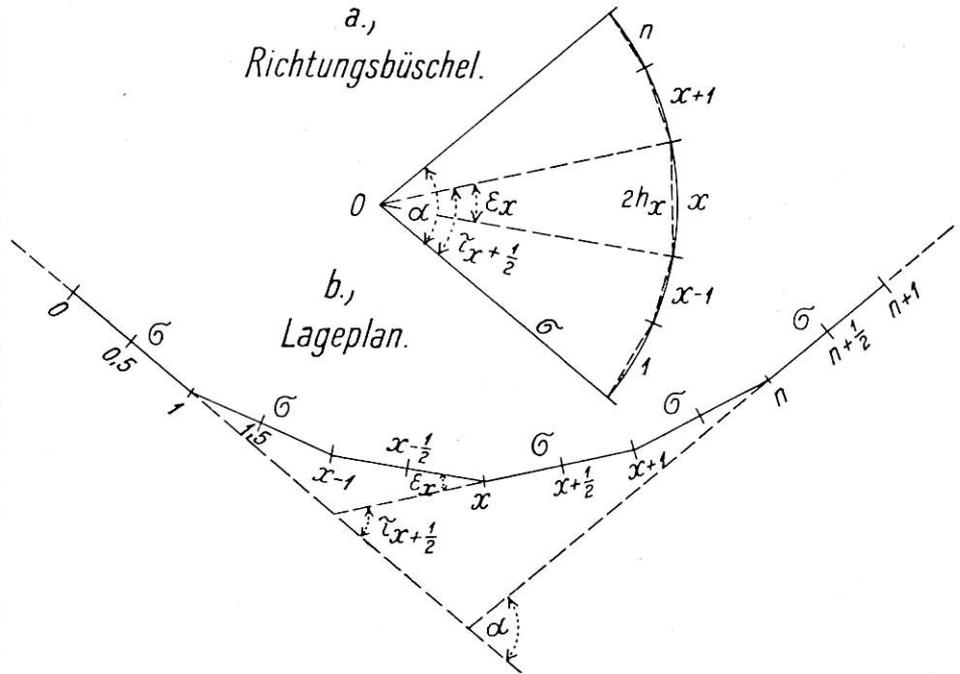


Abb. 2. Das Standvieleck und sein Richtungsbüschel.

die Seiten des Standvielecks von den des Bogenvielecks unterscheiden, dann gebrauchen wir die Bezeichnungen $\sigma_{x-\frac{1}{2}}^A$ und $\sigma_{x-\frac{1}{2}}^B$. Allgemein besteht aber: $b_{x-1} + a_x = \sigma_{x-\frac{1}{2}}$. Im vorigen Abschnitte war $\sigma_{x-\frac{1}{2}} = \sigma$ konstant.

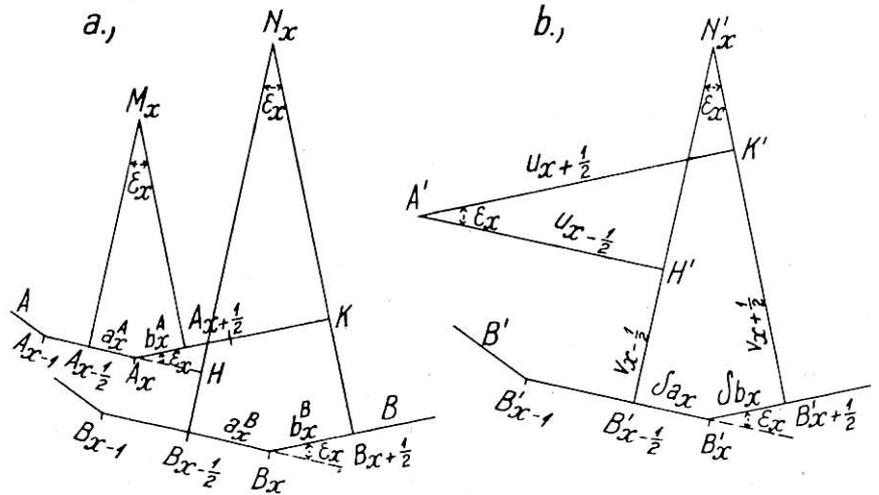


Abb. 3.

Ein Teil des Stand- und Bogenvielecks und Verschiebungsplan derselben.

Die Tangentenabschnitte des Standvielecks sind durch die Annahme der Berührungspunkte gegeben. Nach Annahme des vorigen Abschnittes z. B. ist $b_{x-1}^A = a_x^A = \frac{1}{2} \sigma_{x-\frac{1}{2}}^A = \frac{1}{2} \sigma$. Die Tangentenabschnitte des Bogenvielecks können aus dem Halbmesser R des Bogens und dem Winkel ϵ_x nach folgenden Gleichungen berechnet werden:

$$a_x^B = b_x^B = R \cdot \operatorname{tg} \frac{\epsilon_x}{2} \dots \dots \dots 6).$$

Da ein Gleisbogen gewöhnlich aus zwei Übergangsbogen und einem Kreisbogen besteht, muß bemerkt werden, daß die Gl. 6) nur für den Teil des Kreisbogens Gültigkeit besitzen. Für die Übergangsbogen berechnen wir überhaupt keine Tangentenabschnitte, weil wir sie im Laufe unseres Verfahrens nicht benötigen. Da es aber in einzelnen Fällen auch die Festsetzung der Tangentenabschnitte der Übergangsbogen als wünschenswert erscheinen kann, so werden wir uns mit dieser Aufgabe später näher befassen.

Die Tangentenabschnitte und der Winkel ϵ_x bestimmen die Deltoide $A_{x-\frac{1}{2}} A_x A_{x+\frac{1}{2}} M_x$ und $B_{x-\frac{1}{2}} B_x B_{x+\frac{1}{2}} N_x$ vollständig, die wir im folgenden abgekürzt mit $[A_x M_x]$ und $[B_x N_x]$ bezeichnen. Aus diesen Deltoiden können auch die Normalabschnitte ausgerechnet werden. Ist dabei ϵ_x sehr klein oder im Grenzübergange zu Null begriffen ($\epsilon_x \rightarrow 0$), dann sind diese Abschnitte einander gleich und geben den Krümmungshalbmesser der betreffenden Kurve.

Man zerlege die Verschiebung der Berührungspunkte des Bogenvielecks von den entsprechenden Punkten des Standvielecks, d. h. die Verschiebungsvektoren $\overline{A_{x-\frac{1}{2}} B_{x-\frac{1}{2}}}$ und $\overline{A_{x+\frac{1}{2}} B_{x+\frac{1}{2}}}$ in der Richtung der Tangente und Normalen in je zwei Komponenten und trage diese mit sich selbst parallel von einem beliebig gewählten A' Punkte der Ebene auf (Abb. 3b). Die Tangentenkomponenten sind $\overline{A_{x-\frac{1}{2}} H} = \overline{A' H'} = u_{x-\frac{1}{2}}$ und $\overline{A_{x+\frac{1}{2}} K} = \overline{A' K'} = u_{x+\frac{1}{2}}$, die Normalkomponenten aber $\overline{H B_{x-\frac{1}{2}}} = \overline{H' B'_{x-\frac{1}{2}}} = v_{x-\frac{1}{2}}$ und $\overline{K B_{x+\frac{1}{2}}} = \overline{K' B'_{x+\frac{1}{2}}} = v_{x+\frac{1}{2}}$. Die vorigen kann man Längsverschiebungen, die letzteren Querverschiebungen nennen. Diese Gleichheiten sind vom Maßstabe der Abb. 3a und 3b selbstverständlich unabhängig, was deshalb betont werden muß, weil wir Abb. 3b in einem wesentlich größeren Maßstabe herstellen als Abb. 3a, um einzelne Abstände aus dieser Abbildung auch durch Abmessen bestimmen zu können.

Die aus den Punkten $B'_{x-\frac{1}{2}}$ und $B'_{x+\frac{1}{2}}$ mit den entsprechenden Tangenten gezogene Parallelen stehen auf den Normalkomponenten $v_{x-\frac{1}{2}}$ und $v_{x+\frac{1}{2}}$ senkrecht und schneiden einander im Punkte B'_x , während der Schnittpunkt der Normalkomponenten N'_x ist. Das Deltoid $[B'_x N'_x]$ steht im engen Zusammenhange mit den Deltoiden $[B_x N_x]$ und $[A_x M_x]$, da jede einzelne seiner Seiten mit dem Unterschiede der entsprechenden Seiten der letzteren gleich ist.

Um diesen Lehrsatz zu beweisen, wollen wir Abb. 3b von 3a derart ableiten, daß die Verschiebungsvektoren parallel verschoben werden und ihre Anfangspunkte von $A_{x-\frac{1}{2}}$ und $A_{x+\frac{1}{2}}$ in den Punkt A_x geraten. Dadurch wird klar, daß die Endpunkte an den Seiten des Bogenvielecks — von $B_{x-\frac{1}{2}}$ und $B_{x+\frac{1}{2}}$ ausgehend — die Verschiebungen a_x^A und b_x^A erleiden. Somit können also folgende Gleichungen angeschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} \delta a_x &= a_x^B - a_x^A \\ \delta b_x &= b_x^B - b_x^A \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 7),$$

wo δa_x und δb_x abgekürzte Zeichen der in Abb. 3b dargestellten Abstände $\overline{B'_{x-\frac{1}{2}} B'_x}$ und $\overline{B'_x B'_{x+\frac{1}{2}}}$ sind. Der Unterschied der Tangentenabschnitte ist also gleich mit den entsprechenden Seiten des Deltoides $[B'_x N'_x]$. Ebenso einleuchtend ist, daß auch zwischen den Normalabschnitten ähnliche Zusammenhänge bestehen.

Im Laufe dieses Vorgehens gingen wir mittels Verschiebung der Berührungspunkte von der Kurve A in die Kurve B über, wobei wir fanden, daß während dieses Überganges die Tangentenabschnitte einen Zuwachs δa_x und δb_x erfuhren. Ist also $a_x^A = a_x$ und $b_x^A = b_x$, so sind $a_x^B = a_x + \delta a_x$ und $b_x^B = b_x + \delta b_x$. Im allgemeinen wird jener Zuwachs jeder auf

diese Kurven bezughabenden Größe, die beim Übergange von einer Kurve in die andere (hier von A in B) entsteht, mit dem Variationszeichen δ bezeichnet, während zur Bezeichnung der entlang der einzelnen Kurven entstehenden Änderungen das Differenzenzeichen Δ oder das Differenzialzeichen d dient. So sind z. B. die zu den entsprechenden Punkten zweier Kurven gehörenden Bogenlängen s und $s + \delta s$, während die Bogenlängen für je zwei benachbarte Punkte der einzelnen Kurven s und $s + \Delta s$ oder s und $s + ds$ sind, je nach dem Maße des Abstandes beider Punkte. In unserem Falle sind die Tangenten der entsprechenden Punkte der zwei Kurven parallel, und so ist der Zuwachs des Tangentenwinkels τ im Übergange von einer Kurve zur anderen $\delta \tau = 0$, während entlang den Kurven selbst $\Delta \tau = \epsilon$ ist.

In Abb. 3b kommen außer der Verschiebung der Berührungspunkte der Bogen A und B auch noch andere Verschiebungen vor, wie z. B. die Verschiebung $\overline{A' B'_x} = \overline{A_x B_x}$ der Eckpunkte A_x und B_x , oder jene $\overline{A' N'_x} = \overline{M' N'_x}$ der Normalpunkte M_x und N_x . Hier finden wir ferner den Vektor $\overline{B'_{x-\frac{1}{2}} B'_{x+\frac{1}{2}}}$ vor, den Vektor jener relativen Verschiebung, welche die den Endpunkten des Vektors entsprechenden Punkte beim Übergange vom Vieleck A in das Vieleck B erleiden. Zeichnen wir aus Punkt A' , dem sogenannten Pol, alle jene Verschiebungsvektoren auf, die zwischen den Berührungspunkten oder den Eckpunkten des Stand- und des Bogenvielecks bestehen, so liegen ihre Endpunkte auf einem Vielecke B' , wobei alle durch zwei Punkte derselben bestimmten Vektoren im Übergange vom Vielecke A in B die relative Verschiebung zweier Punkte darstellen. Dementsprechend nennen wir das Vieleck B' und die es umhüllende, nach dem Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ entstehende stetige Kurve die relative Verschiebungslinie des Vielecks oder der Kurve A und B, kurz das relative Bild, oder noch kürzer das Bogenbild. Genauer ausgedrückt muß gesagt werden, daß diese relative Verschiebungslinie das auf die Standkurve A bezogene relative Bild des Bogens B ist. Die Benennung „relatives Bild“ entsteht aus der Vorstellung, daß eine entlang der Standkurve A schreitende Person die Bewegung eines am Bogen B gleichzeitig sich bewegenden entsprechenden Punktes so sieht, wie wenn sie die Bewegung des entsprechenden Punktes des relativen Bildes B' im Pol A' stehend betrachten würde.

Nach dem oben ausgesprochenen Lehrsatz ist die Länge des relativen Bildes B' mit dem Unterschiede der entsprechenden Bogenlängen der Bogen B und A gleich, während dessen Krümmungshalbmesser mit dem Unterschiede der entsprechenden Halbmesser des Bogens B und A gleich ist. Diese Feststellung wird in unserem nachstehend zu entwickelnden Verfahren als Grundsatz dienen.

Abgesehen von der Richtung der Verschiebungsvektoren nennen wir das relative Bild B' samt dem Pol A' den gegenseitigen Verschiebungsplan des Bogens A und B, weil er mit vom Pol weggerichteten Vektorensinne die Verschiebungen der Punkte des Bogens B von den Punkten des Bogens A, mit zum Pol gerichtetem Vektorensinne aber jene der Punkte des Bogens A von denen des Bogens B darstellt. Doch kann der auf die Standkurve A bezogene Verschiebungsplan des Bogens B anstatt dem aus dem Pol gerichteten Vektorensinne mit einem zum Pol gerichteten Vektorensinne verfertigt werden, durch Auftragen der Elemente der relativen Verschiebungslinie in entgegengesetzter Richtung, wodurch wir den in Abb. 3b dargestellten Plan in einer um 180° verdrehten Lage erhalten. In diesem Falle aber wechseln A und B im Verschiebungsplane ihre Rollen, demzufolge die relative Verschiebungslinie mit A' , der Pol aber mit B' bezeichnet werden muß. Auch die nähere Benennung der Verschiebungslinie

ändert sich, indem diese hier das auf den Bogen B bezogene relative Bild der Standkurve A genannt wird.

4. Absteckplan eines Bogens mit gegebenem Halbmesser.

Nachdem der Begriff des gegenseitigen Verschiebungsplanes zweier Bogen eingeführt ist, wird nunmehr der Absteckplan jenes Kreisbogens konstruiert, dessen Halbmesser gegeben ist, und der mittels entsprechenden Übergangsbogen sich an zwei gegebenen Geraden anschließen soll.

Abb. 4b stellt skizzenhaft das zur Absteckung des Bogens dienende Standvieleck (A) und in der Nähe dieses Vielecks den abzusteckenden Bogen (B) mit dem Halbmesser R dar, welcher Bogen von den in Gelände gegebenen Geraden t, t in einer gewissen Entfernung f — dem Parameter der in Aussicht genommenen Übergangsbogen — zurückbleiben muß. Auf die Berechnung des Wertes f werden wir später noch zurückkommen. Auf dem Kreisbogen B sind auch die Berührungspunkte des Bogenvielecks vermerkt. Nach Aufmessung der Seiten und Winkel des Standvielecks verfertigen wir das Richtungsbüschel (Abb. 4a) und mit Hilfe dessen den Lageplan des Standvielecks, ferner mittels der aus den Gl. 6) und 7) errechneten Tangentenabschnitte das auf das Standvieleck bezogene relative Bild des abzusteckenden Bogens oder Bogenvielecks (B', Abb. 4c). Hier muß bemerkt werden, daß jene Tangentenabschnitte, die rechnermäßig negativen Wertes sind, bei der Konstruktion des Bogenbildes B' im negativen Sinne aufzutragen sind, wie das auch in Abb. 4c mit den Tangentenabschnitten δb_2 und δa_4 geschehen ist.

Zum Bogenbilde B' muß noch der Pol A' konstruiert werden, um den vollständigen Verschiebungsplan zu erhalten. Wäre die Verschiebung eines Tangentialpunktes, z. B. des ersten Punktes des Bogenvielecks vom entsprechenden Punkte des Standvielecks bekannt, dann könnte der Ort des Pols A' nach dem vorigen Abschnitte leicht festgestellt werden. Statt dessen ist aber hier je eine Verschiebungskomponente des ersten und letzten Tangentialpunktes des Bogenvielecks bekannt, und zwar die Normalkomponenten, deren Größe an beiden Stellen f ist. Diese Aufgabe ist also eine sogenannte Randwertsaufgabe. Zieht man nun von den Punkten 0,5 und 5,5 des relativen Bildes B' in der Entfernung f zu den Endtangente je eine Parallele, so erhält man im Schnittpunkte dieser Geraden den gesuchten Pol A'. Diese mit t' bezeichneten Parallelen entsprechen den Endtangente t, der Pol A' aber dem Standvielecke. Beim Auftragen der Entfernungen f muß darauf geachtet werden, daß diese an ein und dieselbe Seite der Geraden t', t' und t, t zu liegen kommen. Der Pol A' und das relative Bild B' bilden mit dem vom Pol weggerichteten Vektorsinne den Verschiebungsplan des abzusteckenden Bogens.

Nach der Konstruktion des Verschiebungsplanes setzen wir die Tangenten- und Normalkomponenten der einzelnen Verschiebungen fest und tragen diese in Abb. 4d am geradlinig ausgespannten Bilde des Standvielecks — von den Halbierungspunkten der Seiten des Standvielecks ausgehend — auf, um diese bei der Absteckung des Bogens zur Verfügung zu haben. Diesen sogenannten Absteckplan hätten wir auch im Zusammenhang mit dem Lageplan des Standvielecks ver-

fertigen können, und so wäre Abb. 4d entbehrlich. Im erörterten Fall aber kann der Lageplan, der nur zur Orientierung dient, gänzlich außer acht gelassen werden, und anstatt dessen die viel einfachere Abb. 4d gebracht werden.

Die Konstruktion des relativen Bildes B' und die Berechnung der Tangentenabschnitte kann etwas vereinfacht werden, wenn man die Seiten des Standvielecks gleichgroß annimmt, die Winkel ϵ aber klein wählt und mit Pfeilhöhen mißt. In diesem Falle kann $\sin \frac{\epsilon_x}{2}$ anstatt $\text{tg} \frac{\epsilon_x}{2}$ gesetzt werden, was in der Gl. 6) nach Gl. 1) mit h_x/σ ersetzt werden kann.

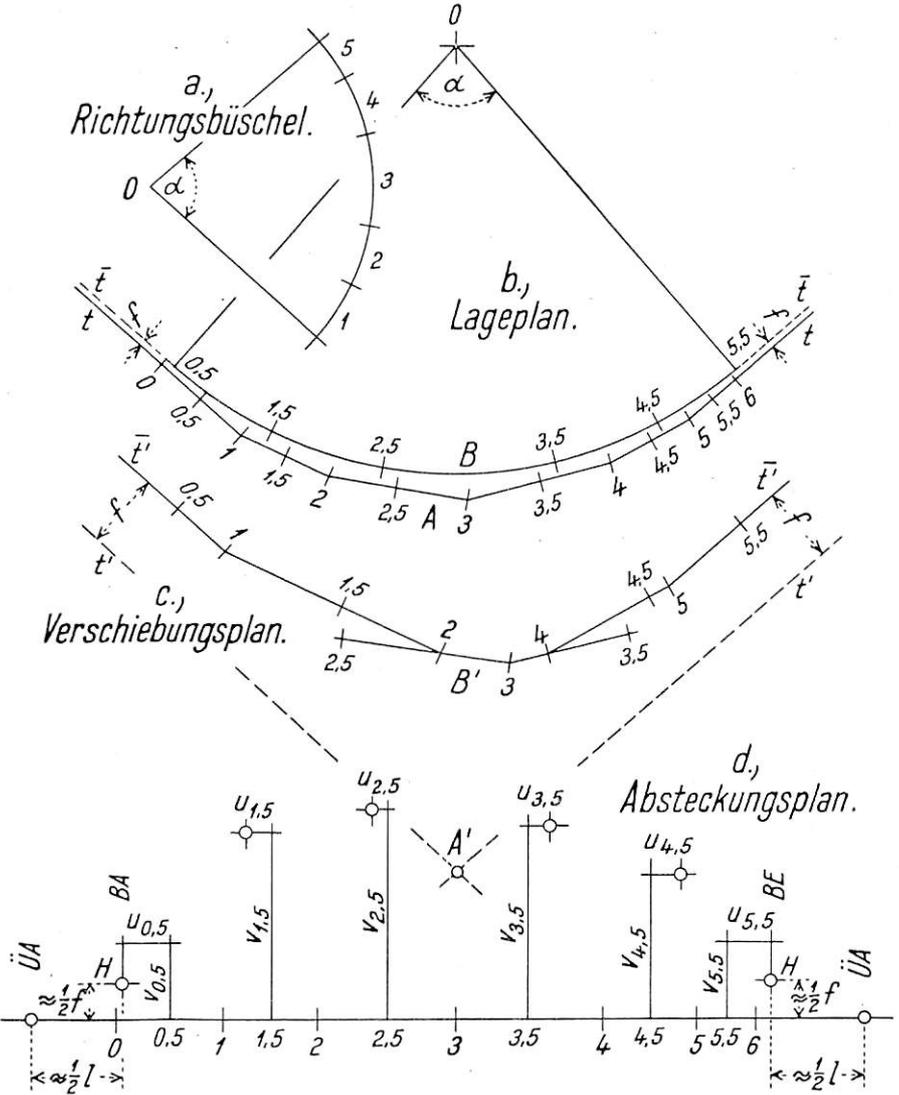


Abb. 4.

Absteckplan eines Bogens mit gegebenem Halbmesser aus dem Standvieleck.

Somit ergeben sich die Tangentenabschnitte des relativen Bildes aus Gl. 7) zu:

$$\delta a_x = \delta b_x = \frac{R}{\sigma} \cdot h_x - \frac{\sigma}{2} = \frac{R}{\sigma} \left(h_x - \frac{\sigma^2}{2R} \right) \dots 8)$$

Das in Klammer stehende zweite Glied bedeutet die Pfeilhöhe, die am Kreisbogen R der Sehnenteilung σ entspricht. Die Tangentenabschnitte des Bogenbildes B' sind also mit dem Unterschiede der Pfeilhöhen der Bogen A und B — immer bezogen auf dieselbe Sehnenteilung σ — proportional.

Mit Hilfe des Absteckplanes steckt man nur den Kreisbogenteil des Bogens ab, und zwar genau so viele Punkte von ihm, als das Standvieleck Seiten besitzt. Für die Absteckung der Punkte der Übergangsbogen muß besonders gesorgt werden, was keine Schwierigkeiten bereitet, wenn die Entfernung des Anfangspunktes des Übergangsbogens von der Normalen des

Punktes $B_{0,5}$ bzw. $B_{5,5}$ bereits bekannt ist. Diese Entfernung ist, wie wir noch sehen werden, in großer Annäherung gleich der halben Länge des Übergangsbogens. In den Halbierungspunkten der Ordinaten f der Punkte $B_{0,5}$ und $B_{5,5}$ erhalten wir ebenfalls mit großer Annäherung je einen Punkt der Übergangsbogen.

Sind die Geländeverhältnisse günstig, so gestaltet sich das Konstruieren des Absteckplanes sehr einfach, da man in diesem Falle außer den Seiten des Standvielecks auch dessen Winkel gleichgroß wählen kann. Die Standkurve wird dann ein Kreisbogen, der aber nur die eine Tangente t berühren kann, während er von der anderen in einem durch die willkürliche Annahme des Anfangsberührungspunktes herrührenden Abstände zurückbleibt. Das Bogenbild B' wird ebenfalls ein Kreisbogen sein, und der Pol A' läßt sich auch in diesem Falle sehr einfach bestimmen, und zwar im Abstand f von der einen, und $f-e$ von der anderen Tangente aus, wo e den Abstand der letzten Seite des Standvielecks von der Endtangente t bedeutet.

Hier wollen wir auch noch darauf zeigen, auf welche Weise die Übergangsbogen in den Absteckplan besser einbezogen werden können. Es ist angezeigt, schon bei der Aufnahme des Standvielecks darauf zu achten, ob wir aus dem Standvieleck

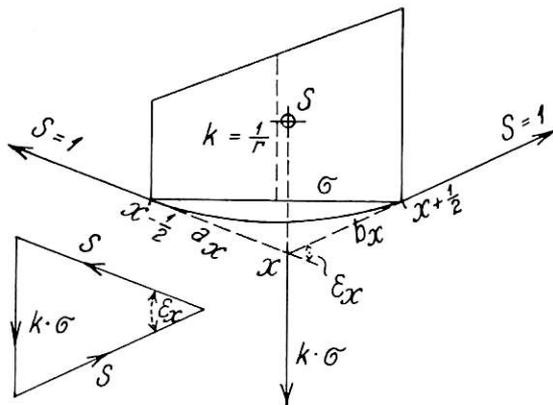


Abb. 5. Seilbogen mit der Krümmung belastet.

auch die Übergangsbogen abstecken wollen, oder uns allein mit der Absteckung des Kreisbogens begnügen. Im ersten Falle trachten wir nämlich, uns durch Führung des Standvielecks nach den Übergangsbogen dadurch zu richten, daß wir die ersten und letzten Winkel des Standvielecks — bei gleichen Seiten — kleiner wählen als die übrigen Winkel. Dadurch gestalten sich die Tangentenabschnitte des Bogenbildes B' auch nicht allzu groß, und somit kann der Maßstab des Bogenbildes B' möglichst groß gewählt werden.

Wollen wir in dem Absteckplan auch die Verschiebungen der einzelnen Punkte der Übergangsbogen geben, dann bestimme man die Tangentenabschnitte der Übergangsbogen in nachstehender Weise; ansonsten ist das Verfahren dasselbe wie oben.

Man nehme ein Seil an und belaste es in der Richtung der Normalen mit solchen spezifischen Drücken, die kontinuierlich den Krümmungen einer beliebigen Kurve entsprechen (Abb. 5). Als Folge dieser Belastung ($k = \frac{1}{r} = \frac{d\tau}{ds}$) nimmt das Seil die Form derselben Kurve an, denn es entsteht an jedem Punkte der Kurve in den Richtungen der Kurventangenten eine der Einheit gleiche Seilkraft ($S = \frac{k \cdot ds}{d\tau} = 1$), die in jedem endlichen und unendlich kleinen Stück der Kurve mit der von der Krümmung gegebenen Belastung im Gleichgewicht steht. Es müssen sich somit die Endtangente eines Bogenstückes als Träger der Seilkräfte infolge des Gleich-

gewichtes auf der Mittelkraft der Belastung schneiden (Abb. 5). Ist der Neigungswinkel der Endtangente, ϵ_x , klein, so ist der auf den Bogen wirkende Druck in jedem Punkte des Bogens als mit der Normalen der Sehne σ parallel zu betrachten (Abb. 5). Die Belastung des Bogens kann also auf diesem kurzen Bogenstück durch seine Krümmungsfläche ersetzt werden, worunter die Darstellung der von der Bogenlänge abhängigen Krümmung in einem rechteckigen Koordinatensystem zu verstehen ist. Es schneiden sich daher die Endtangente des Bogenstückes in der Schwerlinie der Krümmungsfläche, und es ist auch die Summe der Tangentenabschnitte a_x und b_x der Sehne σ als annähernd gleich zu betrachten. Bei kleinen Winkeln ϵ_x können die Tangentenabschnitte a_x und b_x aus den trapezartigen Lamellen der Krümmungsfläche der Übergangsbogen und dessen Schwerlinien ohne weiteres bestimmt werden. Wir bemerken, daß wir nicht allzu sehr fehlen, wenn wir die Trapezscherlinien — ohne sie genauer zu berechnen — nach Gefühl aufnehmen.

5. Differenzgleichungen der Bogenabsteckung.

Um die Verschiebungen vom Standvieleck des abzusteckenden Bogens nicht nur konstruieren, sondern auch berechnen zu können, wollen wir zu Abb. 3 zurückkehren und den dort ersichtlichen Zusammenhängen einen mathematischen Ausdruck geben.

In Abb. 3b bilden die benachbarten Verschiebungskomponenten und Tangentenabschnitte ein Sechseck, in dem der eine Winkel ϵ_x , der gegenüberliegende $\pi - \epsilon_x$ ist, die übrigen vier aber rechte Winkel sind. Projiziert man die Seiten zuerst auf die Linie der Komponenten $u_{x+\frac{1}{2}}$, nachher auf jene von $v_{x+\frac{1}{2}}$, so können zwischen den Seiten und Winkeln dieses Sechsecks sehr einfache Zusammenhänge festgestellt werden. Aus der Summe dieser Projektionen erhalten wir die Differenzgleichungen des Problems der Bogenabsteckung:

$$\left. \begin{aligned} u_{x+\frac{1}{2}} &= \delta b_x + (\delta a_x + u_{x-\frac{1}{2}}) \cdot \cos \epsilon_x - v_{x-\frac{1}{2}} \cdot \sin \epsilon_x \\ v_{x+\frac{1}{2}} &= (\delta a_x + u_{x-\frac{1}{2}}) \cdot \sin \epsilon_x + v_{x-\frac{1}{2}} \cdot \cos \epsilon_x \end{aligned} \right\} \dots 9),$$

wobei nach Gl. 6) und 7)

$$\left. \begin{aligned} \delta a_x &= R \cdot \operatorname{tg} \frac{\epsilon_x}{2} - \frac{1}{2} \sigma_{x-\frac{1}{2}} \\ \delta b_x &= R \cdot \operatorname{tg} \frac{\epsilon_x}{2} - \frac{1}{2} \sigma_{x+\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 10),$$

und $x = 1, \dots, n$.

Sind die Seiten des Standvielecks einander gleich, d. h. ist $\frac{1}{2} \sigma_{x-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sigma_{x+\frac{1}{2}} = r_x \cdot \operatorname{tg} \frac{\epsilon_x}{2}$, wo r_x den Krümmungshalbmesser der Standkurve bedeutet (Abb. 1), dann können die Gl. 9) nach Einführung des Zuwachses $\delta r_x = R - r_x$ und nach den entsprechenden Umformungen in der folgenden Gestalt geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} u_{x+\frac{1}{2}} &= u_{x-\frac{1}{2}} \cdot \cos \epsilon_x - (v_{x-\frac{1}{2}} - \delta r_x) \cdot \sin \epsilon_x \\ v_{x+\frac{1}{2}} &= \delta r_x + u_{x-\frac{1}{2}} \cdot \sin \epsilon_x + (v_{x-\frac{1}{2}} - \delta r_x) \cdot \cos \epsilon_x \end{aligned} \right\} \dots 9*).$$

Diese Gleichungen können auch unmittelbar aus den Projektionen der Seiten des in Abb. 3b ersichtlichen Vierecks $A'H'N'K'$ angeschrieben werden, wenn man beachtet, daß in diesem Falle die Normalabschnitte einander gleich sind, d. h. $B'_{x-\frac{1}{2}}N'_x = B'_{x+\frac{1}{2}}N'_x = \delta r_x$.

Unsere Differenzgleichungen gehen in zwei Differentialgleichungen über, wenn beim Grenzübergang $\epsilon_x \rightarrow 0$ folgende Substitutionen durchgeführt werden: $\sin \epsilon_x = \epsilon_x = d\tau$, $\cos \epsilon_x = 1$, $\delta a_x + \delta b_x = \delta ds = \delta r \cdot d\tau$, $u_{x+\frac{1}{2}} - u_{x-\frac{1}{2}} = du$, $v_{x+\frac{1}{2}} - v_{x-\frac{1}{2}} = dv$; ferner ist in der ersten Gleichung $v_{x-\frac{1}{2}} = v$, in der zweiten aber $u_{x-\frac{1}{2}} = u$ zu setzen und δa_x neben u zu vernachlässigen. Hier bedeutet τ den Tangentenwinkel, s die Bogenlänge und

r den Krümmungshalbmesser. Mit den solcherweise entstehenden Differenzialgleichungen werden wir uns im Nachtrag näher befassen.

Die Gl. 9) und 9*) betrachten wir vorläufig als rekursive Formeln, mit deren Hilfe die mit $x + \frac{1}{2}$ bezeichneten Komponenten aus denen mit $x - \frac{1}{2}$ bezeichneten berechnet werden können. Die Vorzeichenregel der Verschiebungskomponenten wird nach Abb. 3, entsprechend dem von seinem Pol aus gerichteten Verschiebungsplan festgestellt, wobei die Komponenten als positiv zu betrachten sind, wenn die Komponenten u an den Seiten des Standvielecks in die Richtung der fortschreitenden Numerierung zeigen, und wenn die Komponenten v von der konvexen Seite des Standvielecks nach außen gerichtet sind. Das Vorzeichen der zu diesen entgegengesetzt gerichteten Komponenten ist negativ. In Abb. 4 z. B. ist $v_{0,5} = v_{5,5} = -f$, weil diese Komponenten an der konkaven Seite des Standvielecks nach innen zeigen.

Sind die Verschiebungskomponenten des ersten Bogenpunktes bekannt, so können mit Hilfe der Gl. 9) auch die Verschiebungskomponenten jedes einzelnen Bogenpunktes vom zweiten bis zum letzten ausgerechnet werden. Von den Verschiebungskomponenten des ersten Punktes ist aber nur $v_{0,5}$ unmittelbar bekannt ($v_{0,5} = -f$), während $u_{0,5}$ aus der Randbedingung $v_{n+\frac{1}{2}} = -f$ festzustellen ist. Um $u_{0,5}$ ausrechnen zu können, gehen wir von einem beliebig aufzunehmenden Werte $u'_{0,5}$, z. B. $u'_{0,5} = 0$ aus. Die Gl. 9) führen aus dem Versuchswerte $u'_{0,5}$ durch die Reihe der übrigen Verschiebungskomponenten zu den letzten, die wir mit $u'_{n+\frac{1}{2}}$ und $v'_{n+\frac{1}{2}}$ bezeichnen wollen. Die Normalkomponente $v'_{n+\frac{1}{2}}$ genügt aber im allgemeinen der Randbedingung $v_{n+\frac{1}{2}} = -f$ nicht, weshalb diese Versuchskomponenten einer Korrektur bedürfen.

Zwecks Durchführung der nötigen Korrektur geben wir dem Standvieleck außer den Versuchsverschiebungen noch eine neuere Verschiebung in der Richtung der Anfangstangente (Abb. 6). Diese mit $u''_{0,5}$ zu bezeichnende Verschiebung ist in jedem Punkte des Standvielecks gleich. Die Projektionen dieser Verschiebung auf die Tangenten und Normalen ergeben Längs- und Querverschiebungen. Da $u''_{0,5}$ auf $v_{0,5}$ lotrecht steht, beeinflußt diese Korrektur die Randbedingung $v_{0,5} = -f$ nicht. Die Projektion von $u''_{0,5}$ auf der letzten Normalen des Standvielecks aber gibt die Querverschiebung $v''_{n+\frac{1}{2}} = u''_{0,5} \cdot \sin \alpha$, wo α den Zentriwinkel bedeutet. $u''_{0,5}$ ist aus folgender Gleichung zu berechnen:

$$v_{n+\frac{1}{2}} = -f = v'_{n+\frac{1}{2}} + u''_{0,5} \cdot \sin \alpha \dots 11).$$

Wiederholt man nun die Berechnung der Verschiebungskomponenten mit den Anfangswerten $u_{0,5} = u'_{0,5} + u''_{0,5}$ und $v_{0,5} = -f$, so erhalten wir die den Randbedingungen entsprechenden, endgültigen Verschiebungskomponenten. Einfacher kommen wir zum Ziel, wenn anstatt Wiederholung der ganzen Berechnung nur die der Verschiebung $u''_{0,5}$ entsprechenden Komponenten aus den erwähnten Projektionen ausgerechnet, und dann diese zu den schon gefundenen Versuchskomponenten $u'_{x+\frac{1}{2}}$ und $v'_{x+\frac{1}{2}}$ addiert werden. Auf solche Weise entstehen folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} u_{x+\frac{1}{2}} &= u'_{x+\frac{1}{2}} + u''_{0,5} \cdot \cos \tau_{x+\frac{1}{2}} \\ v_{x+\frac{1}{2}} &= v'_{x+\frac{1}{2}} + u''_{0,5} \cdot \sin \tau_{x+\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \dots 12),$$

wo $\tau_{x+\frac{1}{2}}$ wieder den Neigungswinkel der Seite (x, x+1) mit der Anfangstangente bedeutet.

Wie ersichtlich, ist die Befriedigung der Randbedingungen bei dem rechnerischen Verfahren umständlicher als bei graphischem, das ohne jeden Versuch bequem zum Pol A' und somit zu den richtigen Verschiebungen führt.

Bei dem rechnerischen Verfahren bedeutet ein Standvieleck, dessen Winkel gleichgroß sind, einen großen Vorteil, weil in diesem Falle $\sin \varepsilon_x = \sin \varepsilon$ und $\cos \varepsilon_x = \cos \varepsilon$ in sämtlichen Gleichungen die gleichen Beiwerte liefern. Diese Winkel können bei allen Geländebeziehungen durch entsprechende und untereinander verschiedene Annahme der Größen der Seiten des Standvielecks gleichgroß gemacht werden, wie diese auch in den Gl. 10) dargestellt sind. Bei Festsetzung des Winkels ε muß natürlich die Gleichung $n \cdot \varepsilon = \alpha$ beachtet werden.

6. Das Integral der Differenzgleichungen.

Es wird zunächst der Fall erörtert, daß die Standkurve A und der abzusteckende Bogen B Kreisbogen mit gleichem Halbmesser sind und nur durch eine parallele Verschiebung voneinander abweichen (Abb. 7). Dann sind die Tangentenabschnitte beider Kurven gleich und es kann in den Differenz-Gl. 9) $\delta a_x = \delta b_x = 0$ eingesetzt werden. Unsere Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} u_{x+\frac{1}{2}} &= u_{x-\frac{1}{2}} \cdot \cos \varepsilon_x - v_{x-\frac{1}{2}} \cdot \sin \varepsilon_x, \\ v_{x+\frac{1}{2}} &= u_{x-\frac{1}{2}} \cdot \sin \varepsilon_x + v_{x-\frac{1}{2}} \cdot \cos \varepsilon_x \end{aligned} \right\} \dots 13)$$

bilden jetzt nach u und v ein homogenes System, und zwar das homogene System der vollständigen

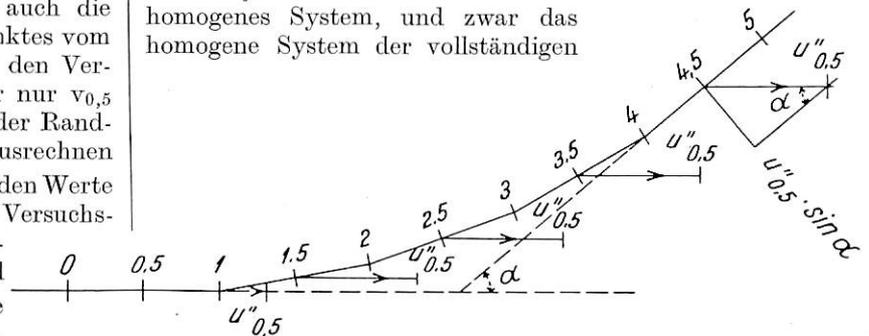


Abb. 6. Die Verschiebung des Standvielecks in der Richtung der Anfangstangente.

Differenzen-Gl. 9). Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist

$$\left. \begin{aligned} u_{x+\frac{1}{2}} &= C_1 \cdot \cos \tau_{x+\frac{1}{2}} - C_2 \cdot \sin \tau_{x+\frac{1}{2}}, \\ v_{x+\frac{1}{2}} &= C_1 \cdot \sin \tau_{x+\frac{1}{2}} + C_2 \cdot \cos \tau_{x+\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \dots 14),$$

wo $\tau_{x+\frac{1}{2}} = \sum_x \varepsilon_x$, C_1 und C_2 aber Festwerte der Integration sind. Von der Richtigkeit dieser Lösung kann man sich überzeugen, wenn man die Komponenten $u_{x-\frac{1}{2}}$ und $v_{x-\frac{1}{2}}$ nach Gl. 14) ausgedrückt in die Gl. 13) einsetzt, woraus die mit den Gl. 14) gegebenen Ausdrücke der Komponenten $u_{x+\frac{1}{2}}$ und $v_{x+\frac{1}{2}}$ identisch zu erhalten sind.

Das Vorhergesagte ist auch dann allgemein gültig, wenn A und B nicht zwei Kreise, sondern zwei kongruente Kurven sind, die auseinander durch parallele Verschiebung entstanden gedacht werden können.

In Abb. 7 sind die parallelen Verschiebungen der entsprechenden Punkte der kongruenten Bogen A und B veranschaulicht. Die die Bogen umhüllenden parallelen Vielecke sind in der Abbildung nicht angedeutet, es sind nur je drei Tangentenpunkte derselben ersichtlich gemacht. Von der Verschiebung der entsprechenden Punkte, namentlich von der Resultierenden der Komponenten $u_{x+\frac{1}{2}}$ und $v_{x+\frac{1}{2}}$ kann nachgewiesen werden, daß deren aus Gl. 14) erhaltbare Größe und Richtung von x unabhängig ist. Um die Größe der Resultierenden feststellen zu können, muß der Wert $w = \sqrt{u_{x+\frac{1}{2}}^2 + v_{x+\frac{1}{2}}^2}$ ausgerechnet werden, während zur Bestimmung der Richtung die Berechnung $\text{tg } \omega = \frac{v_{x+\frac{1}{2}}}{u_{x+\frac{1}{2}}}$, bzw.

$\text{tg } (\omega + \tau_{x+\frac{1}{2}})$ dient.

Die Festwerte der Integration sind die dem Anfangswerte $\tau_{0,5} = 0$ entsprechenden Verschiebungskomponenten: $C_1 = u_{0,5}$ und $C_2 = v_{0,5}$. Am Ende des vorstehenden Abschnittes wurde der Versuchsbogen in der Richtung der Anfangstangente mit $u'_{0,5}$ verschoben. In diesem Falle ist $C_1 = u'_{0,5}$ und $C_2 = 0$, welche Werte aus den Gl. 14) zu den zweiten Gliedern der rechten Seite in Gl. 12) führen.

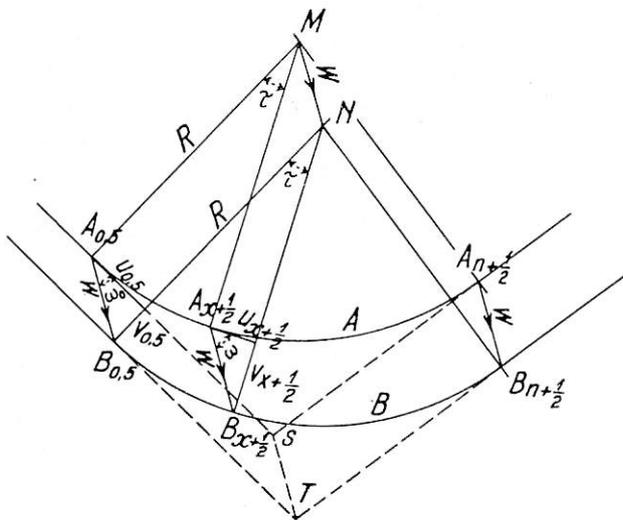


Abb. 7. Parallele Verschiebung kongruenter Bogen.

Die aus den Gl. 9) mit beliebigen Anfangswerten $u'_{0,5}$ und $v'_{0,5}$ gerechneten Versuchskomponenten $u'_{x+1/2}$ und $v'_{x+1/2}$ bilden eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems 9). Dazu muß noch die allgemeine Lösung des homogenen Systems addiert werden, damit die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems:

$$\left. \begin{aligned} u_{x+1/2} &= u'_{x+1/2} + C_1 \cdot \cos \tau_{x+1/2} - C_2 \cdot \sin \tau_{x+1/2}, \\ v_{x+1/2} &= v'_{x+1/2} + C_1 \cdot \sin \tau_{x+1/2} + C_2 \cdot \cos \tau_{x+1/2} \end{aligned} \right\} \dots 15)$$

hervortrete.

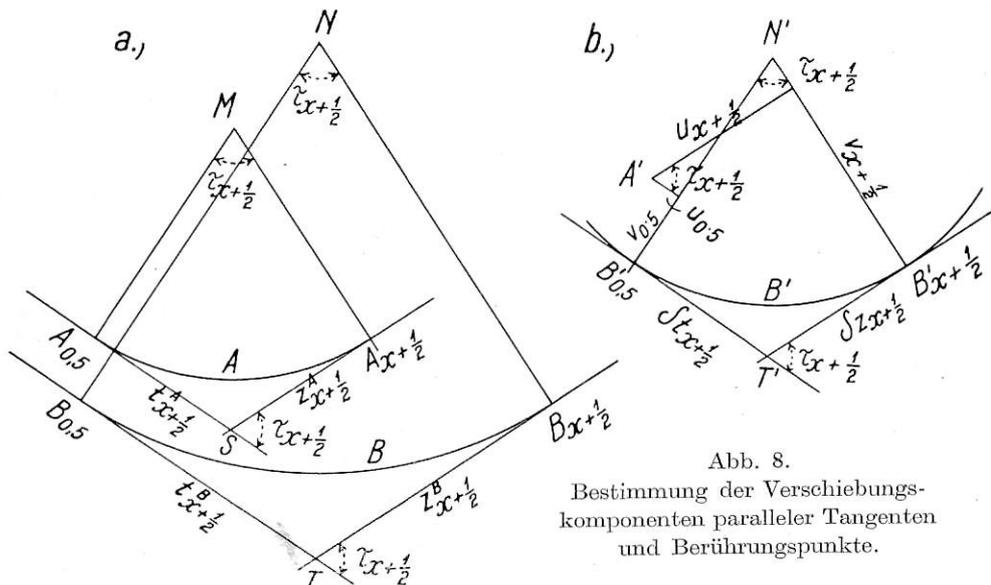


Abb. 8.

Bestimmung der Verschiebungskomponenten paralleler Tangenten und Berührungspunkte.

Was die partikulären Lösungen betrifft, so können solche aus dem System 9) nicht nur mit dem Rekursionsverfahren des vorherigen Abschnittes gewonnen werden, sondern auch durch Vermittlung solcher Gleichungen, die dem Integral des Systems 9) entsprechen. Solche Gleichungen können aus Abb. 8 gewonnen werden, wo die 0,5 und $x + \frac{1}{2}$ Punkte der Kurven A und B, ferner die Verschiebungskomponenten dieser Punkte dargestellt sind. Die Standkurve A und das Bogen-

bild B' sind jetzt natürlich im allgemeinen keine Kreisbogen, obzwar wir diese in der Abb. 8 zwecks Vereinfachung als solche darstellten. Zur Bezeichnung der in der Abb. 8 dargestellten Tangentenabschnitte dienen die Buchstaben t und z mit entsprechenden unteren und oberen Zeigern.

Im Rückblick auf die Zusammenhänge der Abb. 3 und die Ableitung der Gl. 7) kann festgestellt werden, daß diese auch dann Gültigkeit besitzen, wenn an Stelle von ε_x der Wert $\tau_{x+1/2}$ tritt. Halten wir uns dementsprechend anstatt der Abb. 3 die Abb. 8 vor Augen, so können wir aus den Projektionen der Seiten des in Abb. 8b erscheinenden Sechsecks folgende zu 9) ähnliche Gleichungen aufschreiben:

$$\left. \begin{aligned} u_{x+1/2} &= \delta z_{x+1/2} + (\delta t_{x+1/2} + u_{0,5}) \cdot \cos \tau_{x+1/2} - v_{0,5} \cdot \sin \tau_{x+1/2}, \\ v_{x+1/2} &= (\delta t_{x+1/2} + u_{0,5}) \cdot \sin \tau_{x+1/2} + v_{0,5} \cdot \cos \tau_{x+1/2} \end{aligned} \right\} \dots 16),$$

$$\text{wo} \quad \left. \begin{aligned} \delta t_{x+1/2} &= t_{x+1/2}^B - t_{x+1/2}^A, \\ \delta z_{x+1/2} &= z_{x+1/2}^B - z_{x+1/2}^A \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 17)$$

sind. Die letzten beiden Gleichungen liefern eine Verbindung zu den Kurven A und B.

Die Gl. 16) drücken die einzelnen Verschiebungskomponenten voneinander unabhängig aus, sie können somit als das Integral der Differenzen-Gl. 9) betrachtet werden, in der die Anfangswerte $u_{0,5}$ und $v_{0,5}$ wieder Festwerte der Integration sind. Das Gefüge dieser Gleichungen ist das gleiche, wie bei Gl. 15); sie geben eine ebenso allgemeine Lösung wie jene. Es eröffnet sich durch sie eine neue Möglichkeit, partikuläre Lösungen aufzufinden.

Zur Berechnung der in Gl. 16) vorkommenden Tangentenabschnitte bieten die in Abb. 9 dargestellten Zusammenhänge des Bogenbildes B' besonders entsprechende Rekursionsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \delta t_{x+1/2} &= \delta t_{x-1/2} + (\delta z_{x-1/2} + \delta a_x) \cdot \frac{\sin \varepsilon_x}{\sin \tau_{x+1/2}}, \\ \delta z_{x+1/2} &= \delta b_x + (\delta z_{x-1/2} + \delta a_x) \cdot \frac{\sin \tau_{x-1/2}}{\sin \tau_{x+1/2}} \end{aligned} \right\} \dots 18).$$

Diese Tangentenabschnitte können aber auch aus den auf die Anfangstangente und deren Normale gefällten Projektionen der Seiten $\delta a_{i+1} + \delta b_i = \delta \sigma_{i+1/2}$ zweckmäßig errechnet werden. Um den Überblick zu erleichtern und Irrtümer zu vermeiden, ist es angezeigt, all diese Berechnungen — tabellarisch zusammengefaßt — schrittweise durchzuführen.

Zum Schlusse kann nicht verschwiegen bleiben, daß der Gebrauch der Gl. 16) keinen besonderen rechnerischen Vorteil bedeutet, denn was man an Arbeit durch Vermeidung der obengenannten Wiederholungen erspart, muß bei Berechnung der Tangentenabschnitte wieder aufgebracht werden. Die Berechnung der Tangentenabschnitte kann jedoch in gewissen Fällen nützlich sein, weshalb wir hierauf später, bei der Besprechung gewisser gestellten Nebenbedingungen noch zurückgreifen wollen.

7. Regelmäßiges Standvieleck.

Schon in Abschnitt 4 wurde auf den großen Vorteil des regelmäßigen Standvielecks hingewiesen, der darin besteht, daß in diesem Falle nebst dem abzusteckenden Bogen auch die Standkurve ein Kreisbogen ist, desgleichen auch das auf diese bezogene relative Bild des ersten. Jetzt befassen wir

uns mit dieser Frage eingehender, da wir in erster Linie ein derartiges Standvieleck empfehlen, wenn die Anwendung eines solchen infolge der Geländebeziehungen überhaupt möglich ist.

Der Halbmesser des Standkreises wird natürlich mit jenem des abzusteckenden Bogens gleichgroß gewählt, falls dieser gegeben ist. Mit Rücksicht auf unsere späteren Erörterungen aber nehmen wir an, daß zwischen den Halbmessern des abzusteckenden Bogens und des Standkreises der Unterschied δR besteht. Dann werden die Tangentenabschnitte des Bogenbildes mit dem Halbmesser δR folgende sein:

$$\delta t_{x+\frac{1}{2}} = \delta z_{x+\frac{1}{2}} = \delta R \cdot \operatorname{tg} \frac{\tau_{x+\frac{1}{2}}}{2}.$$

Nach Substitution dieser Werte und nach entsprechender Anordnung gehen die Gl. 16) in folgende Form über:

$$\left. \begin{aligned} u_{x+\frac{1}{2}} &= u_{0,5} \cdot \cos \tau_{x+\frac{1}{2}} - (v_{0,5} - \delta R) \cdot \sin \tau_{x+\frac{1}{2}} \\ v_{x+\frac{1}{2}} &= \delta R + u_{0,5} \cdot \sin \tau_{x+\frac{1}{2}} + (v_{0,5} - \delta R) \cdot \cos \tau_{x+\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \dots 19),$$

was in dieser Gestalt aus Abb. 8b auch unmittelbar angeschrieben werden hätte können. Vorausgesetzt ist natürlich, daß das Bogenbild B' als ein Kreisbogen mit dem Halbmesser δR betrachtet werden kann, wie es auch eben gezeichnet ist.

Diese Gleichungen können aber auch so gewonnen werden, daß man von der partikulären Lösung $u'_{x+\frac{1}{2}} = 0, v'_{x+\frac{1}{2}} = \delta R$ des Gleichungssystems 9*) ausgeht, welche Lösung offenbar richtig ist, wenn man im System 9*) den ständigen Wert $\delta r_x = -\delta R$ einsetzt. Mit dieser partikulären Lösung liefert die Gl. 15) die folgenden Festwerte: $C_1 = u_{0,5}$ und $C_2 = v_{0,5} - \delta R$. Sind die A, B und B' in Abb. 8 wirklich Kreisbogen, dann ist der zur partikulären Lösung $u'_{x+\frac{1}{2}} = 0, v'_{x+\frac{1}{2}} = \delta R$ gehörige Pol in N', von wo er dann infolge der Integralfestwerte nach A' versetzt wird.

Die Integralfestwerte müssen gewöhnlich aus den bekannten Verschiebungen $v_{0,5}$ und $v_{n+\frac{1}{2}}$ bestimmt werden, die nach den in dem Abschnitte 4 erörterten Annahme $v_{0,5} = -f$ und $v_{n+\frac{1}{2}} = -(f-e)$ sind. Der Festwert $C_1 = u_{0,5}$ ist somit aus Gl. 19₂) zu berechnen, was im vorliegenden Falle an der Stelle $x = n$

$$e - f = \delta R + u_{0,5} \cdot \sin \alpha - (f + \delta R) \cdot \cos \alpha \dots 20)$$

ergeben wird, wobei der Zentriwinkel $\alpha = \tau_{n+\frac{1}{2}}$ bekannt ist.

Ist der Halbmesser des abzusteckenden Bogens gegeben und jener des Standkreises mit dem des abzusteckenden Bogens gleichgroß gewählt, dann ist in Gl. 19) und 20) $\delta R = 0$ einzusetzen.

Es kann vorkommen, daß bei Hindernissen in den Geländebeziehungen mit einem einzigen regelmäßigen Vieleck kein Standvieleck zwischen den gegebenen Geraden gelegt werden kann, wogegen zwei regelmäßige Vielecke bereits werden. Ein mit zwei solchen Vielecken gebildetes Standvieleck zeigt Abb. 10. Seine Lage ist parallel zu den Geraden der Strecke und gegeneinander verschoben. Die letzte Seite des ersten Teiles des Standvielecks ist mit der ersten Seite des anderen Teiles parallel. Die Tangenten- und die Normalkomponente der gegenseitigen Verschiebung der Punkte 4,5 und 5,5 sind d und e_2 , die Verschiebung der ersten und letzten Seite von den Geraden der Strecke dagegen e_1 bzw. e_3 . Der Halbmesser beider Teile des Standvielecks kann auch verschieden sein, welcher Umstand besonders beim Abstecken von Korbbogen erwünscht ist.

Werden die zum Abstecken des neuen Bogens dienenden Gleichungen auf dieses Standvieleck bezogen, dann müssen zwei dem Gleichungssystem 19) ähnliche Systeme auf je einen

Teil des Standvielecks gesondert angeschrieben werden. Es seien δR_1 und δR_2 die Halbmesser der relativen Bilder beider Teile, A_1, B_1 und A_2, B_2 sollen aber Festwerte bedeuten, dann besteht

$$\left. \begin{aligned} u_{x+\frac{1}{2}} &= A_1 \cdot \cos \tau_{x+\frac{1}{2}} - B_1 \cdot \sin \tau_{x+\frac{1}{2}} \\ v_{x+\frac{1}{2}} &= \delta R_i + A_1 \cdot \sin \tau_{x+\frac{1}{2}} + B_1 \cdot \cos \tau_{x+\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \dots 21),$$

(i = 1, 2)

wo $x = 0, \dots, 4$ sind, wenn $i = 1$ ist, und $x = 5, \dots, 8$ sind, wenn $i = 2$ ist. In dieser

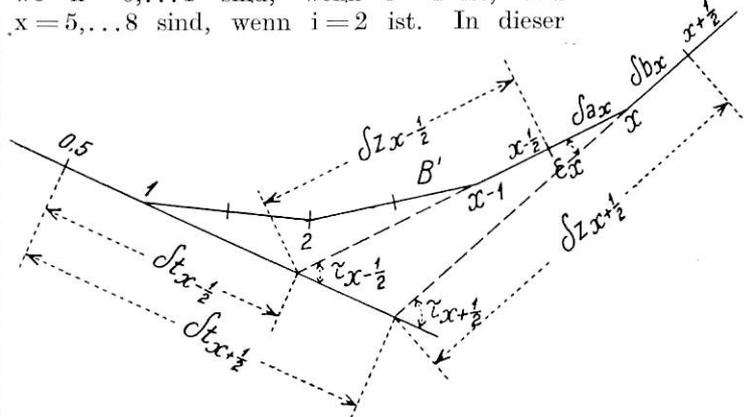


Abb. 9. Bestimmung der Tangentenabschnitte des Bogenbildes.

Gleichungsgruppe sind vier Unbekannte A_1, B_1, A_2, B_2 enthalten, die aus folgenden zwei Rand- und zwei Übergangsbedingungen festzustellen sind:

$$\left. \begin{aligned} v_{0,5} &= e_1 - f, & v_{8,5} &= e_3 - f \\ u_{4,5} &= d + u_{5,5}, & v_{4,5} &= e_2 + v_{5,5} \end{aligned} \right\} \dots 22),$$

wo f wieder den Abstand des Kreisbogens des endgültigen Bogens von den Geraden der Strecke bedeutet. Die Werte δR_i sind natürlich bekannt. Ist nämlich der Halbmesser des abzusteckenden Bogens R , derselbe beider Teile des Standvielecks aber R_1 und R_2 , dann sind $\delta R_1 = R - R_1$ und $\delta R_2 = R - R_2$.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die Verwendung eines Standkreises anstatt einer allgemein gestalteten Standkurve bei unseren numerischen Berechnungen den Vorteil sichert, daß die Differenzgleichungen integriert, die Randbedingungen bequem befriedigt und die Verschiebungen voneinander unabhängig berechnet werden können.

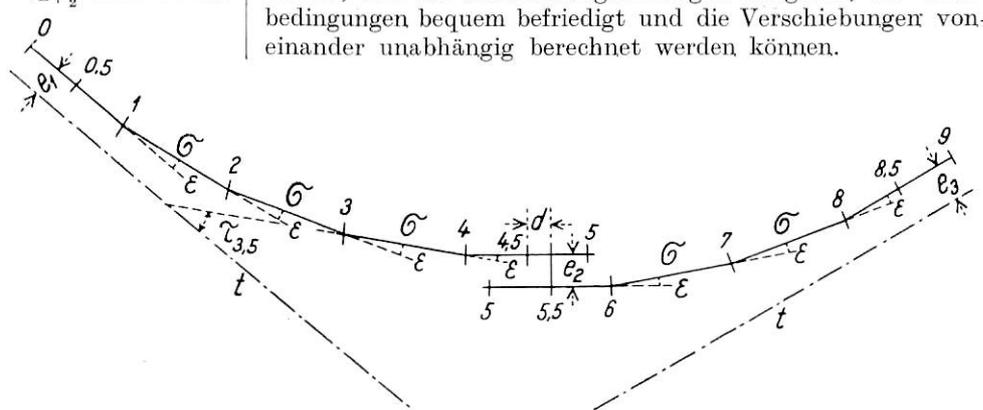


Abb. 10. Zweiteiliges regelmäßiges Standvieleck.

8. Der Übergangsbogen.

Es scheint zweckdienlich, alle jene, mehr oder minder bekannten Formeln und Gleichungen zusammengefaßt anzuführen, die die Gestalt des Übergangsbogens kennzeichnen.

Als Übergangsbogen gebrauchen wir gewöhnlich ein Stück der Klothoide. Die natürliche Gleichung der Klothoide ist:

$$s \cdot r = p^2 \dots 23),$$

wo s die Bogenlänge, r den Krümmungshalbmesser bedeutet, während p ein Festwert, der Parameter der Klothoide

ist. Der Parameter p ist gleich der Bogenlänge bzw. dem Krümmungshalbmesser jenes Punktes der Klothoide, wo diese auch untereinander gleich sind, $s=r=p$.

Der Wert p ist bei den verschiedenen Eisenbahnen auf verschiedene Art festgesetzt; er hängt im allgemeinen von der größten zugelassenen Fahrgeschwindigkeit ab. Der Parameter der den Vorschriften der MÁV entsprechenden Übergangsbogen kann mit genügender Annäherung auch aus der Gleichung:

$$p = 60 + 0,02 \cdot v^2 \dots \dots \dots 24)$$

berechnet werden, wo v die Fahrgeschwindigkeit in km/Std. bedeutet. Aus dieser Gleichung erhalten wir p in m-Einheiten.

Einzelne Eisenbahnen schreiben anstatt des Parameters die Länge l des Übergangsbogens in runden Metern für die verschiedenen Bogenhalbmesser R vor. Die Folge dieses Verfahrens ist, daß auf ein und demselben Streckenabschnitte ganz unbegründet Übergangsbogen verschiedenen Parameters Anwendung finden. Die Identität der Übergangsbogen auf einem Streckenabschnitt ist nur durch das Vorschreiben des Parameters gesichert. Aus obiger Gleichung ergeben sich bei den üblichen Fahrgeschwindigkeiten in der Abstufung von 10 km/Std. etwa zehn verschiedene Übergangsbogen. Dementsprechend genügen zur Absteckarbeit der Abszissen und Ordinaten der Übergangsbogen nur zehn verschiedene Tabellen, was schon an sich dem erwähnten Zustande gegenüber eine große Vereinfachung bedeutet.

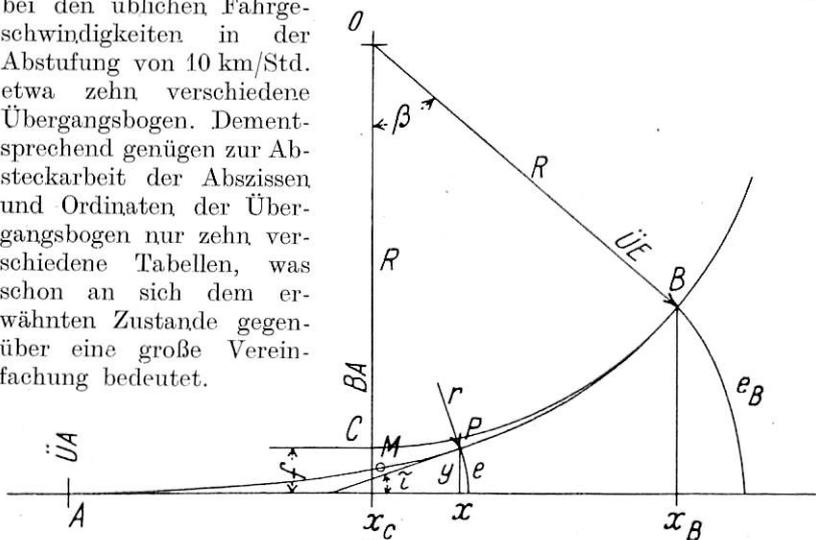


Abb. 11. Die Klothoide als Übergangsbogen zwischen einer Geraden und einem Kreise.

Der Anfangspunkt des in Abb. 11 dargestellten Übergangsbogens liegt in Punkt A ($s=0, r=\infty$), der Endpunkt in B ($s=1, r=R$), und die Mitte in M ($s=\frac{1}{2}l, r=2R$). Ein Zwischenpunkt ist P mit den auf den Anfangspunkt und die Anfangstangente bezogenen Koordinaten x und y . Der Anfangspunkt des eigentlichen Bogens, des Kreisbogens mit dem Halbmesser R liegt in C im Abstände f von der Anfangstangente.

Die volle Bogenlänge des durch den Parameter p gegebenen Übergangsbogens bis Punkt B ist:

$$l = \frac{p}{R} \cdot p \dots \dots \dots 25).$$

Die Krümmung des Übergangsbogens in Punkt P ist:

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{r} = \frac{s}{p^2} \dots \dots \dots 26),$$

seine Tangentenwinkel aber in den Punkten P und B sind:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{1}{2} \left(\frac{s}{p} \right)^2 \\ \beta &= \frac{1}{2} \left(\frac{l}{p} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{R} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 27).$$

Die Länge des Kreisbogens \widehat{BC} wird:

$$\widehat{BC} = R \cdot \beta = \frac{1}{2} \frac{p}{R} \cdot p = \frac{1}{2} l \dots \dots \dots 28),$$

also halb so groß wie die volle Länge des Übergangsbogens.

Leicht können auch die folgenden Formeln bewiesen werden. Die Längen der aus den Punkten P und B ausgehenden Evolventen von diesen Punkten bis zur Anfangstangente sind:

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{1}{6} \left(\frac{s}{p} \right)^2 \cdot s, \\ e_B &= \frac{1}{6} \left(\frac{l}{p} \right)^2 \cdot l = \frac{1}{6} \left(\frac{p}{R} \right)^3 \cdot p \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 29).$$

Die Koordinaten des Punktes P sind bei kleinem τ Werten mit großer Annäherung:

$$\left. \begin{aligned} x &= s \cdot \left[1 - \frac{1}{40} \left(\frac{s}{p} \right)^4 \right], \\ y &= e \cdot \left[1 - \frac{1}{56} \left(\frac{s}{p} \right)^4 \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 30).$$

Aus diesen Formeln ergeben sich bei Einsetzung $s=1$ die Koordinaten des Punktes B. Demgegenüber können die Koordinaten des Punktes C durch folgende Formeln — ebenfalls mit großer Annäherung — gegeben werden:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{1}{2} l \cdot \left[1 - \frac{1}{120} \left(\frac{p}{R} \right)^4 \right], \\ y_C &= f = \frac{1}{4} e_B \cdot \left[1 - \frac{1}{112} \left(\frac{p}{R} \right)^4 \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 31).$$

Ist das Verhältnis p/R , wie es in den meisten Fällen zu sein pflegt, klein, dann kann das zweite Glied im Ausdrucke f vernachlässigt werden, und so wird

$$f = \frac{1}{4} e_B = \frac{1}{24} \left(\frac{p}{R} \right)^3 \cdot p \dots \dots \dots 32)$$

sein, also der vierte Teil der zum Endpunkte des Übergangsbogens gehörigen Evolvente. Neben den praktischen Werten des Bogenhalbmessers macht man zum Ausrechnen des Wertes f allgemein von dieser Formel Gebrauch.

Muß ein Übergangsbogen zwischen zwei Bogen eingeschaltet werden, dann wird seine Länge

$$l = \left(\frac{p}{R_2} - \frac{p}{R_1} \right) \cdot p \dots \dots \dots 33),$$

wo R_1 und R_2 die Halbmesser beider Bogen bedeuten und $R_1 > R_2$ ist. Die Verschiebung beider Bogen ist mit großer Annäherung:

$$f = \frac{1}{24} l^2 \cdot \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right),$$

oder, wenn man anstatt l den Parameter des Übergangsbogens einführt:

$$f = \frac{1}{24} \cdot \left(\frac{p}{R_2} - \frac{p}{R_1} \right)^3 \cdot p \dots \dots \dots 34).$$

Diese Formel geht mittels Substitution $R_2 = R$ und $R_1 = \infty$ in 32) über.

Der Beweis dieser Formeln ist hier deshalb weggelassen, weil ihre Rechtfertigung anderenorts auffindbar ist und ohnehin leicht erbracht werden kann.

9. Erstes Zahlenbeispiel.

Abzustecken ist ein Bogen mit einem Halbmesser von 300 m bei einem Zentriwinkel von 56° zwischen zwei im Gelände gegebenen Geraden. Der Parameter der Übergangsbogen sei $p = 132$ m, was nach Gl. 21) einer Geschwindigkeit von $v = 60$ km/Std. entspricht. Es sollen dann der Anfang und das Ende des Bogens (d. h. der Halbierungspunkt der Ordinate des Punktes C, Abb. 11), weiter jene Bogenpunkte bestimmt werden, an denen die Tangentenwinkel der Reihe nach ein Viertel, die Hälfte und drei Viertel des Zentriwinkels bilden.

Die Winkel des zur Absteckung nötigen fünfseitigen Standvielecks sind der Aufnahme nach einander gleich, d. h. $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 14^\circ$, während dessen Seiten der Reihe nach zu $\sigma_{0,5} = 74$ m, $\sigma_{1,5} = 72$ m, $\sigma_{2,5} = 70$ m, $\sigma_{3,5} = 75$ m, $\sigma_{4,5} = 74$ m gemessen worden sind. (Es wird nämlich angenommen, daß die Seiten wegen ungünstiger Terrainverhältnisse nicht gleich groß gewählt werden können). Selbstredend müssen auch die Anfangs- und Endpunkte der Übergangsbogen berechnet werden.

Für die Lösung der Aufgabe folgen wir zuerst dem zeichnerischen Verfahren. Wir zeichnen vor allem den Richtungsbüschel und Lageplan des Standvielecks (Abb. 12a und 12b), wozu bereits nach dem vorhergehenden eine Erklärung entbehrlich ist. Hierauf folgt der Entwurf des Verschiebungsplanes (Abb. 12c), dem die in Tab. I errechneten Tangentenabschnitte zugrunde liegen. Die Tabelle benötigt ebenfalls keine weitere Erklärung als den Hinweis darauf, daß die in den Spalten 5, 6 und 7 angeführten Tangentenabschnitte durch Gl. 10) verknüpft sind, da für die Tangentenabschnitte a_x und b_x immer die Hälfte der eben angegebenen entsprechenden Seiten gesetzt werden muß

$$\left(a_x = \frac{1}{2} \sigma_{x-\frac{1}{2}}, b_x = \frac{1}{2} \sigma_{x+\frac{1}{2}} \right).$$

In Abb. 12c wurden die Tangentenabschnitte δa_x und δb_x des relativen Bildes des abzusteckenden Bogens parallel zu den entsprechenden Richtungslinien des Richtungsbüschels aufgetragen; zu dem so gewonnenen relativen Bogenbilde B' wurde der Pol A' konstruiert, der von der ersten und der letzten Seite des Bogenbildes B' den Abstand $f = 0,4685$ m hat.

Es ergibt sich nämlich mit der im Abschnitt 8 vorkommenden

$$\text{Verhältniszahl } \frac{p}{R} = \frac{132}{300} = 0,440 \text{ aus der Gl. 32)}$$

$$f = \frac{1}{24} \cdot 0,440^3 \cdot 132 = 0,4685 \text{ m.}$$

Nachher wurden aus dem vom Pole gerichteten Verschiebungsplane $[A', B']$ der Reihe nach die Verschiebungskomponenten der Punkte 0,5, 1,5, 2,5, 3,5, 4,5 festgestellt und dann im Lageplane in den Halbierungspunkten der Seiten aufgetragen, und zwar die Längsverschiebungen im Maßstabe der Abb. 12b, jene der Querverschiebungen aber in dem der Abb. 12c. Die Größen der einzelnen Verschiebungen wurden im Lageplane eingetragen, so daß sie bei der Absteckung zur Verfügung stehen.

Bei der numerischen Berechnung der Aufgabe gehen wir von den Versuchs-Verschiebungskomponenten des Punktes 0,5 aus, für die wir die Werte $u'_{0,5} = 0$ und $v'_{0,5} = -f$ wählten. Die nach den Gl. 9) vollzogene Berechnung der Verschiebungskomponenten ist in Tabelle II zusammengefaßt, wobei die

Tangentenabschnitte δa_x und δb_x der Tabelle I entnommen wurden.

Die in den Spalten 6 und 7 eingetragenen Verschiebungskomponenten u' und v' sind durch Summierung der Spalten 3, 4, 5, oder 4, 5 entstanden, wie dies die Gl. 9) fordern.

Der endgültige Wert von $u_{0,5}$ wird aus der Querverschiebung $v'_{4,5} = 2,1236$ m des letzten Punktes durch Ver-

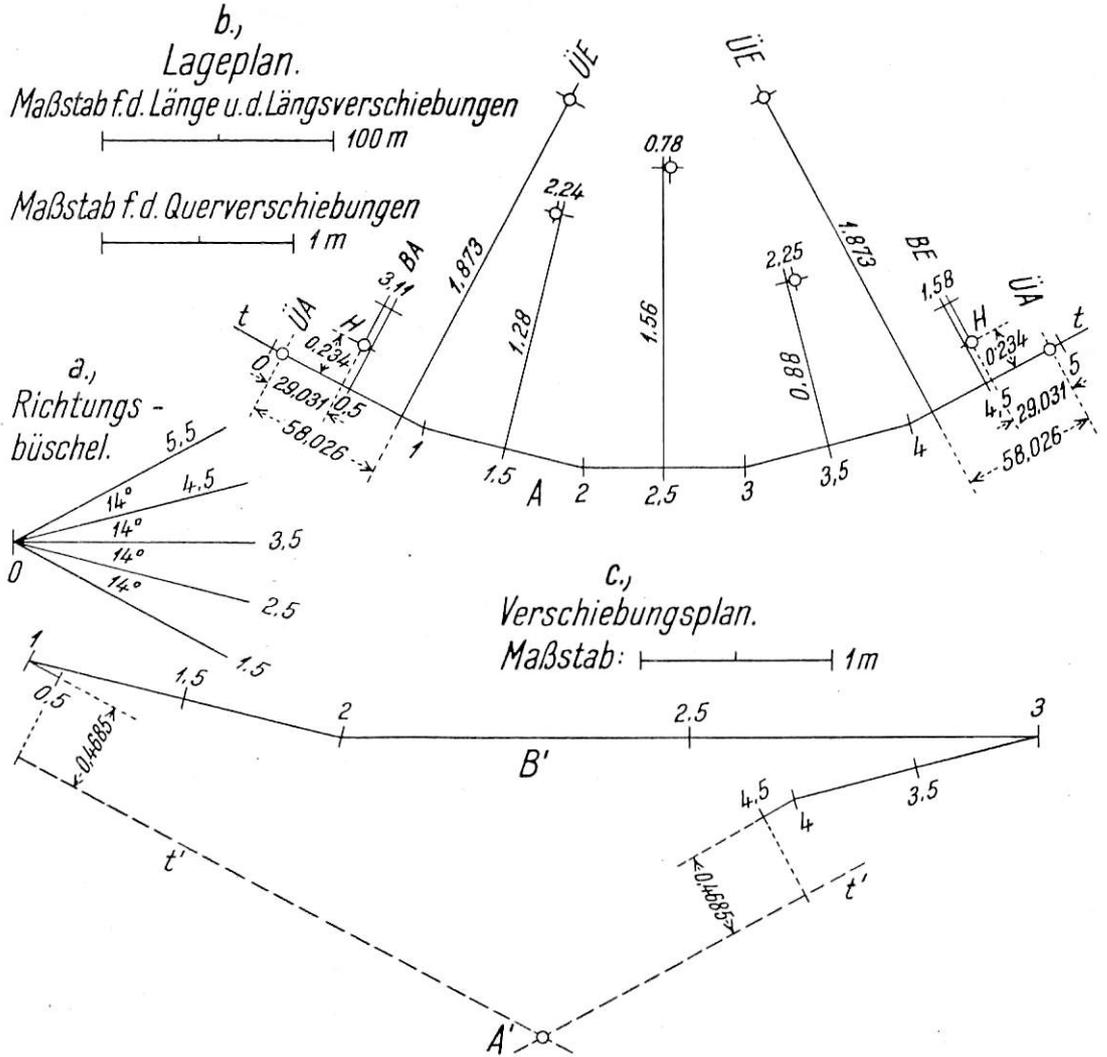


Abb. 12. Absteckplan eines zwischen zwei gegebenen Geraden einzulegenden Bogens mit einem Halbmesser von 300 m.

Tabelle I.

x	$\sigma_{x+\frac{1}{2}}$ m	ϵ_x	$\text{tg } \frac{\epsilon_x}{2}$	$R \cdot \text{tg } \frac{\epsilon_x}{2}$ m	a_x b_x m	δa_x δb_x m
1	2	3	4	5	6	7
0	74,000					
1	72,000	14°	0,122785	36,836	37,000 36,000	-0,164 0,836
2	70,000	14°	0,122785	36,836	36,000 35,000	0,836 1,836
3	75,000	14°	0,122785	36,836	35,000 37,500	1,836 -0,664
4	74,000	14°	0,122785	36,836	37,500 37,000	-0,664 -0,164
5						

Tabelle II.

x	$\frac{\sin \epsilon_x}{\cos \epsilon_x}$	$\frac{\delta a_x}{\delta b_x}$ m	$(\delta a_x + u_{x-\frac{1}{2}})'$ $\frac{\sin \epsilon_x}{\cos \epsilon_x}$ m	$\frac{v_{x-\frac{1}{2}}'}{\cos \epsilon_x}$ $-\frac{\sin \epsilon_x}{m}$	$u_{x+\frac{1}{2}}'$ m	$v_{x+\frac{1}{2}}'$ m
1	2	3	4	5	6	7
0					0,0	-0,4685
1	0,241922 0,970296	-0,1640 0,8360	-0,0396 -0,1591	-0,4546 0,1132	0,7901	-0,4942
2	0,241922 0,970296	0,8360 1,8360	0,3934 1,5778	-0,4795 0,1195	3,5333	-0,0861
3	0,241922 0,970296	1,8360 -0,6640	1,2989 5,2098	-0,0835 0,0208	4,5666	1,2154
4	0,241922 0,970296	-0,6640 -0,1640	0,9443 3,7866	1,1793 -0,2940	3,3286	2,2136
5						

mittlung der Bedingungs-Gl. 11) berechnet. Da $\sin \alpha = \sin 56^\circ = 0,829038$ ist, so wird

$$u_{0,5} = \frac{-2,1236 - 0,4685}{0,829038} = -3,127 \text{ m}$$

sein. Die dem Werte $u_{0,5}$ entsprechenden Verschiebungskomponenten wurden in Spalte 4 der Tabelle III berechnet. Die endgültigen Komponenten sind in den Spalten 5 und 6 eingetragen. Diese sind den Gl. 12) entsprechend derart entstanden, daß zu den Werten der Spalte 4 die entsprechenden Werte aus Spalte 6 und 7 der Tabelle II addiert wurden.

Tabelle III.

x	$\tau_{x+\frac{1}{2}}$	$\frac{\sin \tau_{x+\frac{1}{2}}}{\cos \tau_{x+\frac{1}{2}}}$	$u_{0,5} \cdot \frac{\sin \tau}{\cos \tau}$ m	$u_{x+\frac{1}{2}}$ m	$v_{x+\frac{1}{2}}$ m
1	2	3	4	5	6
0					
1	0°	0,0 1,0	0,0 -3,127	-3,127	-0,4685
2	14°	0,241922 0,970296	-0,7565 -3,0337	-2,244	-1,251
3	28°	0,469472 0,882948	-1,468 -2,760	0,773	-1,554
4	42°	0,669131 0,743145	-2,091 -2,325	2,242	-0,876
5	56°	0,829038 0,559193	-2,592 -1,749	1,580	-0,4685

Die volle Länge der Übergangsbogen gemäß Gl. 25) ist: $l = 132 \cdot 0,440 = 58,080 \text{ m}$. Der Abstand ihres Anfangspunktes vom Bogenanfang und Bogenende (d. h. den Bogenpunkt 0,5 und 4,5) nach der Gl. 31₁) wird:

$$x_C = \frac{58,080}{2} \cdot \left[1 - \frac{1}{120} \cdot 0,440^4 \right] = 29,031 \text{ m},$$

die Koordinaten ihrer Endpunkte aber nach den Gl. 30)

$$x_B = 58,080 \cdot \left[1 - \frac{1}{40} \cdot 0,440^4 \right] = 58,026 \text{ m},$$

$$y_B = 1,874 \cdot \left[1 - \frac{1}{56} \cdot 0,440^4 \right] = 1,873 \text{ m}.$$

Alle diese Maße finden wir in Abb. 12 eingetragen. Schließlich kann noch festgestellt werden, daß die Ergebnisse des zeichnerischen und des rechnerischen Verfahrens gut übereinstimmen,

obwohl die Arbeit auf einer Zeichnung kleinen Maßstabes aufgebaut wurde. Die Anforderungen an die Genauigkeit der Berechnung kann man übrigens ermäßigen und sich mit jener begnügen, die der Rechenschieber bietet.

II. Bogenabsteckung mit Nebenbedingungen.

10. Verbesserung des Bogenhalbmessers.

Neben den Randbedingungen müssen für den abzusteckenden Bogen häufig noch andere, sogenannte Nebenbedingungen befriedigt werden. Eine solche Bedingung ist beispielsweise die Forderung, daß der Bogen auf einem vorhandenen Damme verbleibe, oder daß er sich an gewisse Gebäude oder Kunstbauten anpasse, oder daß er eine gegebene Gerade berühre, durch einen gegebenen Punkt gehe oder dortselbst beginne und dergl. In diesen Fällen ist der Halbmesser des Bogens aus der gegebenen Nebenbedingung vorher auszurechnen, damit der Absteckplan des Bogens aufgestellt werden kann. Ein anderes Verfahren ist, wenn man den Halbmesser des Bogens zuerst mit einem Versuchswert aufnimmt und diesen nachher im Laufe des Verfahrens der vorgeschriebenen Nebenbedingung entsprechend verbessert. Das Verbessern des Halbmessers des Versuchsbogens ist besonders beim zeichnerischen Verfahren sehr einfach, weil dann die Nebenbedingung in der Regel ebenso leicht befriedigt werden kann wie die Randbedingungen.

Mittels eines Versuchsbogens wird die Aufgabe in zwei Schritten gelöst, und zwar durch Vereinigung zweier Verschiebungspläne. Die zu verschiebenden Punkte werden zuerst von der Standkurve auf den Versuchsbogen, dann von diesem auf den abzusteckenden Bogen übertragen. Die Resultierende dieser beiden Verschiebungen gibt die Verschiebungen der Punkte des endgültigen Bogens von dem Standvieleck. Damit die dazu gehörigen Verschiebungspläne in einen resultierenden Plan zusammengefaßt werden können, wird der erste mit zum Pol, der zweite aber mit vom Pol gerichteten Vektorensinne mit gemeinsamen Pol verfertigt, wie dies Abb. 13 veranschaulicht.

In Abb. 13 ist A' das relative Bild des Standvielecks, C' das des abzusteckenden Kreisbogens, beide auf den dem Pol B' entsprechenden Versuchskreisbogen B bezogen. Die Tangentenabschnitte von A' werden also erhalten, wenn die entsprechenden Tangentenabschnitte des Versuchsbogens von den Tangentenabschnitten der Standkurve subtrahiert werden (vergl. den Schluß des Abschnittes 3). Ebenso wie B und C ist auch C' ein Kreisbogen, dessen Halbmesser δR aus dem Unterschied der Halbmesser von C und B entnommen wird. Am Kreisbogen C' sind auch die Berührungspunkte der mit den Seiten des Standvielecks parallelen Tangenten dargestellt. Der zum Pol gerichtete Verschiebungsplan [A', B'] gibt die Verschiebungen des Versuchsbogens vom Standvieleck, und der vom Pol gerichtete [B', C'] gibt die des endgültigen Bogens vom Versuchsbogen. Da die im Pol B' sich treffenden Verschiebungen sich nach Pfeilsinn zusammensetzen, bietet der durch die Kurven A' und C' gegebene resultierende Verschiebungsplan [A', C'] die zwischen den Kurven A und C bestehenden gegenseitigen Verschiebungen. In diesem Verschiebungsplan sind die Anfangs- und Endpunkte der Verschiebungen im entsprechenden Punkte der Kurve A' und des Kreisbogens C'.

Die durch den Pol B' gehenden Geraden \bar{t}' , \bar{t}' sind mit jenen Geraden der Strecke parallel, an die sich die Übergangsbogen des Versuchs- und des abzusteckenden Bogens, ferner im Sinne unserer Annahme auch die äußeren Seiten des Standvielecks unmittelbar anschließen. Die erste und die letzte Seite des relativen Bildes des Standvielecks (t' , t') liegen von den Geraden \bar{t}' , \bar{t}' in ebenso großem Abstände,

wie die Geraden t, t' der Bahnstrecke von den Endtangente des Kreisbogens B . Dieser mit f_B zu bezeichnende Abstand wird mit Hilfe der Gl. 32) aus dem Halbmesser des Versuchsbogens und dem Parameter des Übergangsbogens berechnet. Bezeichnet man den ähnlich errechneten Abstand des abzusteckenden Bogens von den Geraden der Bahnstrecke mit f_C , dann wird der Abstand der Endtangente des Bogenbildes C' von den Geraden \bar{t}', \bar{t}' :

$$\delta f = f_C - f_B \dots \dots \dots 35).$$

Bezeichnet man den Halbmesser der Bogen B und C mit R und $R + \delta R$, und ist δR gegenüber R klein, so kann der Zuwachs δf als Ableitung des f aus der Gl. 32) berechnet werden, woraus

$$\delta f = -\frac{1}{8} \left(\frac{p}{R}\right)^4 \cdot \delta R \dots \dots \dots 36)$$

wird. Aus dieser Gleichung folgt, daß δf und δR entgegengesetzten Sinnes sind, und somit schneidet der Kreisbogen C' die Geraden \bar{t}', \bar{t}' (Abb. 13). In den Schnittpunkten D'_1 und D'_2 wurde der Tangenten- bzw. Normalwinkel mit β bezeichnet. Von diesem Winkel weisen wir nach, daß er dem Neigungswinkel der Endtangente des Übergangsbogens gleich ist. Anstatt der aus der Abb. 13 zu entnehmenden Gleichung

$$\cos \beta = \frac{\delta R - \delta f}{\delta R}$$

kann in Anbetracht der Kleinheit des Winkels β und mit Rücksicht auf Gl. 36)

$$1 - \frac{1}{2} \beta^2 = 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{p}{R}\right)^4$$

geschrieben werden, woraus sich

$$\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{R}\right)^2$$

ergibt. Dieser Ausdruck stimmt mit dem unter 27₂) gefundenen Ausdruck überein, und somit ist β tatsächlich dem Endtangente Winkel des Übergangsbogens gleich. Das Stück $\widehat{D'_1 D'_2}$ des Bogenbildes C' entspricht jenem Teile des abzusteckenden Bogens, der zwischen die Endpunkte der Übergangsbogen fällt, während die Kreisstücke $\widehat{C'_{0,5} D'_1}$ bzw. $\widehat{D'_2 C'_{5,5}}$ den über die Übergangsbogen fallenden Kreisbogenstücken entsprechen.

Zieht man aus dem Pol B' Tangente zum Bogenbild C' , und bezeichnet deren mit den Endtangente-Parallelen gebildeten Neigungswinkel mit γ , dann kann aus der Abb. 13 festgestellt werden, daß

$$\cos \left(\frac{\alpha}{2} - \gamma\right) = \frac{\delta R}{(\delta R - \delta f) : \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \beta} \dots \dots 37).$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß γ unabhängig von δR ist, und somit berühren alle jene Kreise mit dem Halbmesser δR , die relative Bilder des Kreisbogens je eines Bogens sein können, die durch den Pol B' gehenden und durch die Gl. 37) bestimmten zwei Geraden (Abb. 13).

Nimmt man als Versuchsbogen nicht nur den Kreisbogen des abzusteckenden Bogens, sondern den vollen Bogen samt seinen Übergangsbogen an, und konstruiert man das relative Bild A' auf diesen ebenfalls mit B zu bezeichnenden Bogen bezogen, dann braucht für die Übergangsbogen nicht besonders gesorgt zu werden, weil das Bogenbild A' dieselben mit sich bringt. In diesem Falle gewinnen wir die Übergangsbogen des endgültigen Bogens C in der Richtung der Tangente durch parallele Verschiebung der Übergangsbogen des Bogens B . Diese Verschiebung ist in der Abb. 13 $B'D'_1$, bzw. $B'D'_2$. Die

Verschiebungen der Punkte des Übergangsbogens beginnen also am Bogenbilde A' und enden in Punkt D'_1 bzw. D'_2 .

Der Halbmesser des Bogenbildes C' ist so zu wählen, daß nebst den Randbedingungen auch die gegebene Nebenbedingung erfüllt wird. Ist das Erfordernis zu erfüllen, daß der Bogen auf einem vorhandenen Damme Platz habe, dann werden die äußersten Grenzen der am Daume zulässigen Querverschiebungen mit dem Standvieleck zusammen aufgemessen und auf beiden Seiten des relativen Bildes des Standvielecks aufgetragen. Verbindet man mit einer stetigen gebrochenen Linie die Endpunkte dieser zulässigen Querverschiebungen, so erhält man jenen Flächenstreifen, innerhalb dessen das Bogenbild C' Platz haben muß. Ist noch der Abstand der Endtangente des Bogenbildes C' vom Pol B' bekannt, so kann die günstigste Lage des Bogenbildes C' auf dem Versuchswege festgestellt werden. Der Halbmesser δR des Bogenbildes C' ist möglichst so anzunehmen, daß der Halbmesser des endgültigen Bogens ganze Meterzahlen ausmacht. Ein ähnliches Vorgehen ist auch dann angezeigt, wenn dem abzusteckenden Bogen Gebäude, Bauwerke oder andere Hindernisse im Wege stehen.

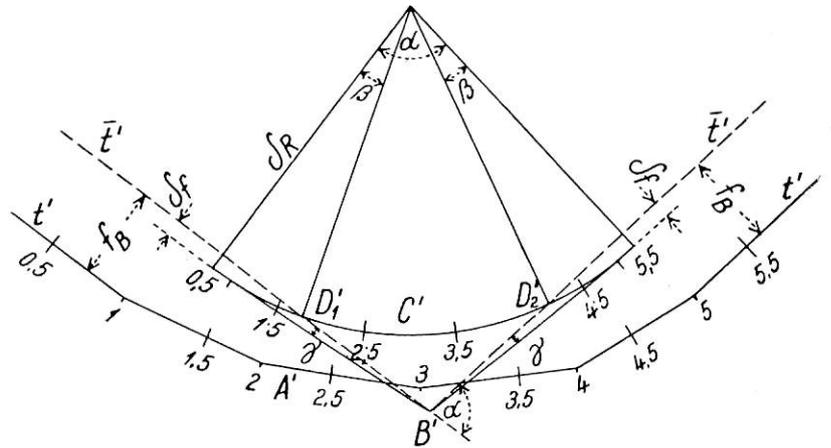


Abb. 13. Verbesserung des Versuchsbogenhalbmessers.

Soll der Bogen eine gegebene Gerade, beispielsweise eine Brückenachse berühren, dann wählt man diese Gerade als eine Seite des Standvielecks und konstruiert den Kreisbogen C' tangential zu dem relativen Bilde dieser Seite, wobei dieser Kreisbogen außerdem noch zwei andere, vom Pol B' im Abstand δf liegende Endtangente-Parallelen berühren muß. Diese drei Geraden bestimmen den Kreis C' vollkommen. Bei dem rechnerischen Verfahren gewinnt man die den Halbmesser δR bestimmende Nebenbedingung aus Gl. 19₂) in der Form $v_{i+1/2} = 0$, wenn die Seite $(i, i+1)$ in der gegebenen Geraden liegt. Der aus dieser Gleichung errechnete Wert δR hilft uns zum Halbmesser des endgültigen Bogens, der gewonnen wird, indem man diesen Wert δR zum Halbmesser der im Abschnitte 7 als Kreis angenommenen Standkurve hinzusetzt. Bei Kenntnis des Wertes δR können die Verschiebungen des endgültigen Bogens nach Befriedigung der Randbedingungen aus den Gl. 19) unmittelbar bestimmt werden.

Ähnlich ist das Verfahren auch dann, wenn der Bogen durch einen gegebenen Punkt gehen muß. In diesem Falle führt man eine zweckmäßig gewählte Seite des Standvielecks durch diesen Punkt und zeichnet das Bogenbild C' , das relative Bild dieser Seite berührend. Fällt der Berührungspunkt in die Nähe des gegebenen Punktes, dann geht der neue Bogen mit großer Annäherung durch ihn hindurch. Gelingt aber dies nicht, dann kann mit geringer Abänderung des Halbmessers des Bogenbildes C' erreicht werden, daß der neue Bogen durch den gegebenen Punkt geht.

Die Befriedigung aller dieser Nebenbedingungen konnte hier wegen Raummangels nur in großen Zügen erörtert werden, doch bietet auch das schon genügende Hinweise, den richtigen Weg aufzufinden.

11. Berichtigung eines vorhandenen Bogens.

Verfahrenere oder aus anderen Gründen fehlerhafte Bogen sind einer Regelung zu unterwerfen, und zwar allgemein durch die Befriedigung jener Bedingung, daß die Länge der Strecke sich infolge der Regelung nicht ändere. Zu diesem Aufgabenkreis gehört aber auch die vorsätzliche Änderung der Streckenlänge, die z. E. auftaucht, wenn zusammen mit dem Bogen auch die Stoßfugen zu regeln sind. Die Länge der Strecke ist hier natürlich zwischen den durch die Regelung nicht berührten Punkten der an den Bogen anschließenden Geraden zu rechnen.

Damit die Längen verschiedener, zwischen zwei Geraden liegender Bogen untereinander bequem verglichen werden können, führen wir einen neuen Begriff ein, den Begriff der durch den Bogen verursachten Streckenverkürzung, worunter der Unterschied der in die Richtung der Geraden der Strecke fallenden Tangentenlängen (d. h. der Endtangenteabschnitte) und der entsprechenden Länge des Bogens zu verstehen ist. Im Lageplane der Abb. 14 sind K und L die Projektionen des Anfangs- und Endpunktes der Standkurve A auf die Geraden t, t' der Strecke. Seien diese Punkte durch die Regelung nicht berührte, und bezeichnen wir mit L_a die Länge der Strecke zwischen diesen Punkten entlang des alten, unregelmäßigen Bogens. Dann ist die durch den alten Bogen verursachte Streckenverkürzung: $(\overline{KT} + \overline{TL}) - L_a$. Der abzusteckende neue Bogen ist B mit in O₁ und O₂ beginnenden Übergangsbogen. Die durch diesen Bogen verursachte Streckenverkürzung wird $(\overline{O_1T} + \overline{TO_2}) - (R \cdot \alpha + l)$ sein, wo R und α Halbmesser und Zentriwinkel des Bogens sind, l aber die Länge der Übergangsbogen. Ist die durch den neuen Bogen verursachte Streckenverkürzung mit der des alten gleichgroß, dann verursacht die Bogenberichtigung keine Längenänderung. Die Unwandelbarkeit der Streckenlänge drückt also folgende Bedingungsgleichung aus:

$$\overline{O_1T} + \overline{TO_2} - (R \cdot \alpha + l) = (\overline{KT} + \overline{TL}) - L_a \dots \dots \dots 38),$$

oder — mit Einführung der Substitution $\overline{O_1T} = \overline{TO_2} = \overline{O_1K_1} + (R + f) \cdot \text{tg} \frac{\alpha}{2}$ und mit Rücksicht auf die Gl. 31₁, 32) und 25) —

$$R \cdot \left\{ 2 \left[1 + \frac{1}{24} \left(\frac{p}{R} \right)^4 \right] \cdot \text{tg} \frac{\alpha}{2} - \alpha - \frac{1}{120} \left(\frac{p}{R} \right)^6 \right\} = (\overline{KT} + \overline{TL}) - L_a \dots \dots \dots 39).$$

Das letzte Glied der linken Seite kann, wenn p/R klein ist, vernachlässigt werden.

Aus Gl. 39) kann der die erwähnte Bedingung der Berichtigung befriedigende Bogenhalbmesser R ausgerechnet werden, wenn die in der Gleichung rechts stehenden Glieder bekannt sind. Die Summe der Tangentenlängen $\overline{KT} + \overline{TL}$ kann zweckmäßig festgestellt werden, wenn die Seiten des Standvielecks unter dem Winkel α auf die Anfangs- und die Endtangente projiziert und die Projektionen summiert werden. So sind aus Detail 14d die Projektionen der Seiten (3—4) = $\sigma_{x+\frac{1}{2}}$

ersichtlich, deren Summe (3—4') ist. Bedeutet allgemein wieder $\tau_{x+\frac{1}{2}}$ den Neigungswinkel der Seite $\sigma_{x+\frac{1}{2}}$ mit der Anfangstangente, dann wird — wie auch aus Abb. 14d festgestellt werden kann — die Summe beider Projektionen der Seite $\sigma_{x+\frac{1}{2}}$:

$$\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{x+\frac{1}{2}} \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \tau_{x+\frac{1}{2}} \right).$$

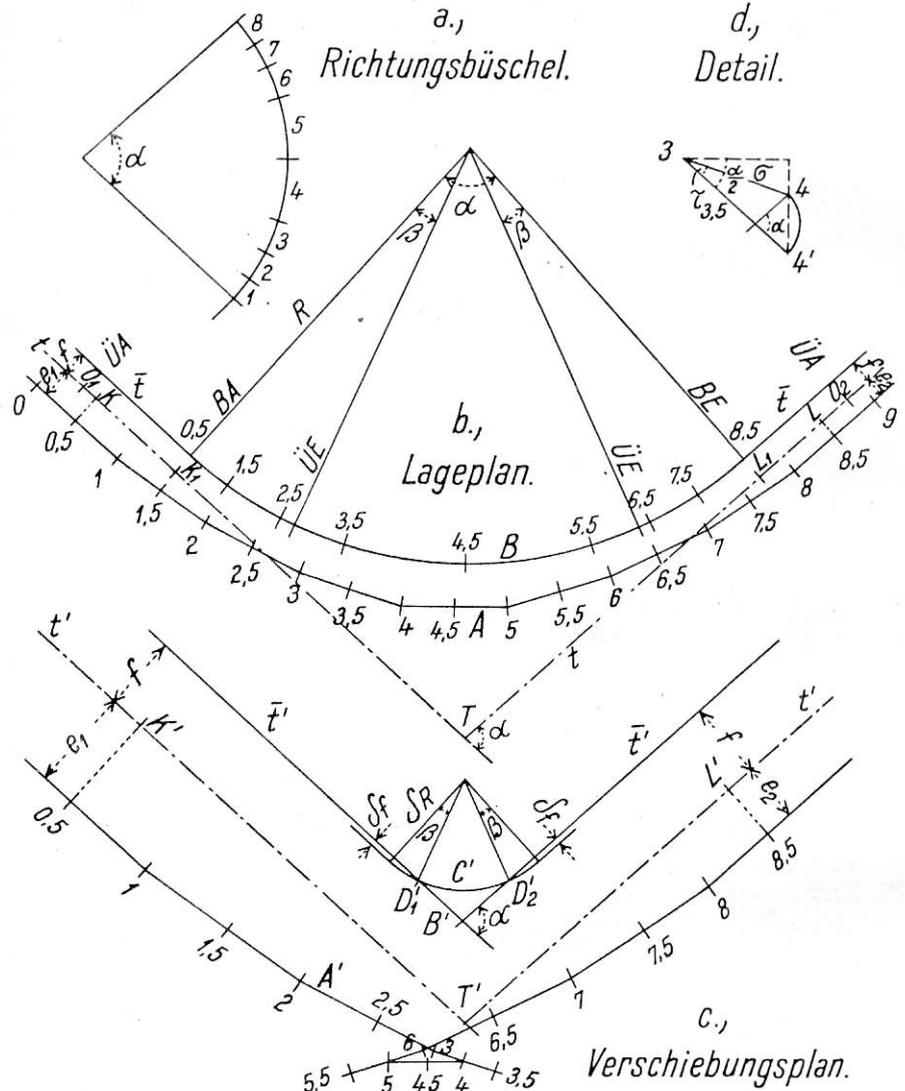


Abb. 14. Berichtigungsplan eines vorhandenen Bogens.

Nimmt man zu diesen Projektionen auch noch die entsprechenden Projektionen der Verschiebungen e_1 und e_2 hinzu, so gewinnt man für die Summe der Tangentenlängen den folgenden Ausdruck:

$$\overline{KT} + \overline{TL} = \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \left[\sum_x^{1, n-1} \sigma_{x+\frac{1}{2}} \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \tau_{x+\frac{1}{2}} \right) - (e_1 + e_2) \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right] + \frac{1}{2} (\sigma_{0,5} + \sigma_{n+\frac{1}{2}}) \dots \dots \dots 40).$$

Bemerkt sei, daß die Tangentenlängen als Endtangenteabschnitte mit Hilfe der Gl. 18), auch im Rekursionsverfahren festgestellt werden können, da die Gl. 18) bei Weglassung des Zeichens δ auch für das Standvieleck gültig sind. All diese Berechnungen können durch das folgende graphische Verfahren gut ersetzt werden.

Was die Bogenlänge L_a betrifft, so wird sie allgemein durch unmittelbares Abmessen am inneren Rande des äußeren

Schienenstranges festgestellt, wenn davon, um die auf die Gleisachse reduzierte Bogenlänge zu gewinnen, das Produkt der halben Spurweite und des Zentriwinkels subtrahiert wird. Wurden die Eckpunkte des Standvielecks am inneren Rande des äußeren Stranges aufgenommen, ferner deren Seiten gleich groß gewählt und die Winkel mit Pfeilhöhen gemessen, dann wird mit den in Abb. 1 gebrauchten Bezeichnungen ($R_x \equiv \rho_x$):

$$L_a = \sum_x^{1,n} R_x \cdot \varepsilon_x - s \cdot \alpha = \sum_x^{1,n} 2 R_x \cdot \arcsin \frac{\sigma}{2 R_x} - s \cdot \alpha,$$

wobei s die halbe Spurweite bedeutet. Ersetzt man diese mit den ersten zwei Gliedern der Reihe des $\arcsin \frac{\sigma}{2 R_x}$ und berücksichtigt man Gl. 2), so gewinnt man für die Bogenlänge der alten Strecke folgenden Ausdruck:

$$L_a = n \cdot \sigma + \frac{1}{6 \sigma} \sum_x^{1,n} h_x^2 - s \cdot \alpha \dots \dots \dots 41).$$

Statt der Berechnung der Summe der ersten zwei Glieder wird es natürlich einfacher sein, entlang dem äußeren Schienenstrange unmittelbar zu messen, was durch die Gleichheit der Schienen in der Regel erleichtert wird.

Aus Gl. 39) wird R zweckmäßig so errechnet, daß man anstatt des Verhältnisses p/R einen Versuchswert annimmt und nachher die Berechnung mit dem verbesserten Werte des R wiederholt. Nach Auswertung des R kann der Berichtigungsplan des Bogens, als ein vom Pol gerichteter Verschiebungsplan, nach der im I. Teil beschriebenen Weise anstandslos gefertigt werden. Bei diesem Verfahren bereitet die Auswertung der Summe $\overline{KT} + \overline{TL}$, besonders bei vielseitigem Standvieleck, einige Schwierigkeit. Um dies zu vermeiden, kann die Aufgabe auch mit Hilfe des im vorigen Abschnitte beschriebenen Versuchsbogens gelöst werden. In diesem Falle wird die Summe $\overline{KT} + \overline{TL}$ im Lageplane (Abb. 14b) des aufgetragenen Standvielecks einfach durch Abmessen festgestellt; aus diesem ungenauen Werte wird R nach Gl. 39) gerechnet. Der so gewonnene Halbmesser R wird als Halbmesser des Versuchsbogens B gewählt, woraus der endgültige Halbmesser des Bogens in folgender Weise festgestellt wird.

In Abb. 14c wurde das auf den Versuchsbogen bezogene relative Bild des Standvielecks, das Bogenbild A' , mit dem dem Versuchsbogen entsprechenden Pol B' konstruiert. Der zum Pol gerichtete Verschiebungsplan $[A', B']$ enthält die Verschiebungen des Versuchsbogens vom Standvieleck. Die Gleisachse der zum Bogen anschließenden Geraden ist im Lageplane mit den Buchstaben t, t , im Verschiebungsplane aber mit t', t' bezeichnet. An diesen sind K und K', L und L', T und T' entsprechende Punkte. Die mit ' bezeichneten Elemente sind die auf den Versuchsbogen bezogene relative Bilder der ohne ' bezeichneten Elemente. Aus den Zusammenhängen der Standkurve, des Versuchsbogens und des relativen Bildes folgt, daß zwischen den entsprechenden Tangentenabschnitten folgender Zusammenhang besteht: $\overline{KT} - \overline{K_1 T} = \overline{K' T'}$ und $\overline{TL} - \overline{T L_1} = \overline{T' L'}$, wo $\overline{K_1 T} = \overline{T L_1} = (R + f) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ die Tangentenabschnitte des Versuchsbogens bedeutet. Aus diesem Zusammenhang folgt ferner, daß

$$\overline{KT} + \overline{TL} = \overline{K' T'} + \overline{T' L'} + 2 (R + f) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \dots \dots 42)$$

ist. Wird somit das auf den Versuchsbogen bezogene relative Bild A' in genügend großem Maßstabe gefertigt, so kann aus Gl. 42) auch der genaue Wert der Summe $\overline{KT} + \overline{TL}$ und somit aus Gl. 39) auch der die Unveränderlichkeit der Streckenlänge sichernde Bogenhalbmesser $R + \delta R$ ausgerechnet werden. Da δR nun schon bekannt ist, kann nach dem vorigen Abschnitte das Bogenbild C' schon konstruiert werden. Der durch die Bogenbilder A' und C' bestimmte resultierende Verschiebungs-

plan $[A', C']$ bildet den Plan der Bogenberichtigung, aus dem ohne weiteres jene Längs- und Querverschiebungen entnommen werden können, mit denen die einzelnen Punkte vom Standvieleck auf den gesuchten regelmäßigen Bogen übergeführt werden können.

Zweckmäßig ist es, die Eckpunkte des Standvielecks am inneren Rande des äußeren Schienenstranges des vorhandenen Bogens und in gleicher Entfernung zu wählen, da in diesem Falle die Winkel des Standvielecks und dessen Pfeilhöhen die Krümmungsverhältnisse des vorhandenen Bogens unmittelbar andeuten und dadurch auch aufklären, ob die Berichtigung auch notwendig ist oder nicht. Die in den Eckpunkten des relativen Bildes eines solchen Standvielecks sich treffenden Tangentenabschnitte werden aus folgenden Gleichungen errechnet:

$$\delta a_x = \delta b_x = \frac{\sigma}{2} - \frac{R}{\sigma} \cdot h_x \dots \dots \dots 43).$$

Diese Tangentenabschnitte geben — auf die entsprechenden Richtungen aufgetragen — das auf den Versuchsbogen bezogene relative Bild des Standvielecks. Die rechte Seite der Gl. 43) unterscheidet sich nur im Vorzeichen von der rechten Seite der Gl. 8), was auf die vertauschte Rolle beider Bogen hinweist (vergl. das am Ende des Abschnittes 3 Gesagte).

Es sei endlich noch bemerkt, daß es in den meisten Fällen zweckmäßig erscheint, den ersten und den letzten Eckpunkt des Standvielecks innerhalb des äußeren Schienenstranges außen zu nehmen. In diesem Falle sind nämlich die Winkel bzw. Pfeilhöhen des Standvielecks genügend groß dazu, daß die aus den Gl. 43) gerechneten relativen Tangentenabschnitte entsprechend klein ausfallen, ebenso damit zugleich das relative Bild.

12. Zweites Zahlenbeispiel (siehe Taf. 17).

Verfertigen wir den Berichtigungsplan jenes Bogens, dessen Pfeilhöhen (am inneren Rande des äußeren Schienenstranges mit der Sehnenteilung $\sigma = 20$ m gemessen) in der Tabelle angeführt sind. Den ersten und den letzten Eckpunkt (0 und 38) des durch die Sehnenteilung gegebenen Standvielecks nehmen wir am äußeren Schienenstrange inwendig auf, damit die äußersten Winkel nicht allzu klein ausfallen. Die erste und die letzte Seite des Standvielecks müssen natürlich mit den an den Bogen anschließenden Geraden parallel sein, von deren Achse sie laut Aufnahme im Abstände von 0,540 m bzw. 0,420 m liegen. Bei der Berichtigung des Bogens ist die Bedingung zu beachten, daß ein in der vorhandenen Strecke liegendes, um 1,20 m gekürztes Schienenpaar durch die Berichtigung gegen ein Schienenpaar üblicher Länge ausgetauscht werden soll. Der Parameter der Übergangsbogen sei $p = 150$ m.

Die Lösung der Aufgabe finden wir in der beigefügten Zahlentafel nebst Angabe des Richtungsbüschels, des Lage- und Verschiebungsplanes des Standvielecks (Taf. 17). Die erste Spalte der Zahlenreihe enthält die Bezeichnungen der Eckpunkte des Standvielecks, die zweite die in den Eckpunkten gemessenen Pfeilhöhen, die dritte die Tangentenabschnitte des nachfolgend errechneten relativen Bildes des Standvielecks.

Das Zeichnen des Richtungsbüschels und Standvielecks bedarf nach dem vorhergesagten keiner weiteren Erklärung. Im Lageplane des Standvielecks wurden die Achsen der an den Bogen anschließenden Geraden und an denselben auch die Projektionen der mit 0,5 und 37,5 bezeichneten Halbierungspunkte der ersten und der letzten Seite des Standvielecks dargestellt. Die Abstände dieser mit den Buchstaben K und L bezeichneten Projektionen sind vom Schnittpunkte T durch Abmessen festgestellt: $\overline{KT} = 520$ m, $\overline{TL} = 521,5$ m. Diese Werte können natürlich nur als Annäherungswerte betrachtet werden.

Der Verschiebungsplan wurde durch Einschalten eines Versuchsbogens mit dem $R = 405$ m hergestellt. Den Halbmesser des Versuchsbogens errechneten wir auf Grund der Gl. 39), wo jetzt auf der rechten Seite außer den Werten $\overline{KT} + \overline{TL} = 520 + 521,5 = 1041,5$ m und $L_a = 37 \cdot 20 + \frac{1}{120} \sum_{x=1}^{1,n} h_x^2 - 0,7175 \cdot 1,8141 = 740 + 0,075 - 1,302 = 738,773$ m auch noch $1,20$ m hinzuzuzählen ist, weil die endgültige Strecke im Sinne der Aufgabe um diesen Betrag länger sein muß als die vorhandene. Anstatt L_a muß also $738,773 + 1,200 = 739,973$ m gesetzt werden. Die in der geschwungenen Klammer der Gl. 39) enthaltenen Größen — mit dem Werte $R = 405$ m gerechnet — sind einerseits in der Spalte „Bemerkung“, andererseits aber wie folgt aufzufinden: $\{2 \cdot 1,000784 \cdot 1,278568 - 0,0000215 - 1,8141\} = 0,74502$. Die den Wert des Halbmessers R bestimmende Gleichung wird folglich: $R \cdot 0,74502 = 1041,500 - 739,973$ sein. Anstatt des aus dieser Gleichung gewonnenen Halbmessers $R = 404,72$ m wählen wir den Halbmesser des Versuchsbogens zu rund $R = 405$ m.

Die Tangentenabschnitte des relativen Bildes des Standvielecks wurden mittels Gl. 43) errechnet und in die dritte Spalte der Tabelle eingetragen. Durch das Auftragen dieser Tangentenabschnitte nach Richtung und Größe erhielten wir das im Verschiebungsplan dargestellte relative Bild A' . Den zum relativen Bild gehörigen Pol B' fanden wir im Schnittpunkte der mit der ersten und letzten Seite derselben im Abstände von $0,540 + f$, bzw. $0,420 + f$ gezogenen Parallelen. f ist der Abstand des Kreisbogens des Versuchsbogens von der Achse der an den Bogen anschließenden Geraden, dessen Wert $0,318$ m ist.

Die in Gl. 42) vorkommenden Werte $\overline{K'T'}$ und $\overline{T'L'}$ werden im Verschiebungsplane durch Abmessen festgestellt: $\overline{K'T'} = 0,590$ m, $\overline{T'L'} = 3,440$ m. Das Vorzeichen dieser Werte ist positiv, da ihre Richtung mit jener von \overline{KT} und \overline{TL} übereinstimmt. Der genaue Wert der Summe $\overline{KT} + \overline{TL}$ wird somit um $0,590 + 3,440 = 4,030$ m größer sein, als die Summe der Tangentenlängen des Versuchskreisbogens. Nach Gl. 42) wird $\overline{KT} + \overline{TL} = 4,030 + 2 \cdot 405 \cdot 1,000784 \cdot 1,278568 = 1040,482$ m. Der genaue Wert des Halbmessers muß also aus Gleichung $(R + \delta R) \cdot 0,74502 = 1040,482 - 739,973$ gerechnet werden. Anstatt des so gewonnenen $R + \delta R = 403,36$ m wurde der endgültige Halbmesser des Bogens zu $R + \delta R = 403,50$ m festgestellt. Der endgültige Bogen wird somit etwas länger ausfallen als der gewünschte. Der Mehrbetrag der Länge ist $0,14 \cdot 0,74502 = 0,104$ m, was durch Anwendung größerer Fugen auszugleichen ist. Wäre dies im gegebenen Falle nicht statthaft, so müßte der Bogenhalbmesser mit seinem genaueren Werte in Rechnung gestellt werden.

Das relative Bild (C') des endgültigen Bogens wird somit ein Kreis mit dem Halbmesser $\delta R = -1,50$ m sein, der zur Krümmung des Versuchsbogens in entgegengesetztem Sinne aufzutragen ist, wie dies auch der Verschiebungsplan veranschaulicht. Am so gewonnenen Bogenbild C' sind noch die den Halbierungspunkten des Standvielecks entsprechenden Punkte zu konstruieren, welche die auf die Seiten des Standvielecks winkelrecht stehenden Halbmesser aus dem Umfange des Kreises herauszuschneiden. Bezüglich des Abstandes δf der Endtangente des C' sei bemerkt, daß dieser im Verschiebungsplane nicht einmal bezeichnet wurde, weil er im ganzen nur 3 mm groß ist. Nach Gl. 36) ist nämlich

$$\delta f = -\frac{1}{8} \cdot 0,440^4 \cdot (-1,50) = 0,003 \text{ m.}$$

Der resultierende Verschiebungsplan [A', C'] bildet den Berichtigungsplan des Bogens, mit Hilfe dessen die einzelnen

Punkte des endgültigen Bogens C derart gewonnen werden, daß man die Verschiebungsvektoren $\overline{A'_{x+\frac{1}{2}}C'_{x+\frac{1}{2}}}$ aus den Punkten $A_{x+\frac{1}{2}}$ des Standvielecks aufträgt. Die Tangenten- und Normalkomponenten der Verschiebungsvektoren sind zur Erleichterung der Absteckung des Bogens C im Lageplane des Standvielecks in m-Einheiten vermerkt. Geht man von den Halbierungspunkten des Standvielecks aus, so findet man zuerst die Normalkomponenten, und zwar vergrößert im Maßstabe des Verschiebungsplanes, während die Tangentenkomponenten — unter Beibehaltung des Maßstabes des Lageplanes — aus den Normalkomponenten folgen.

Die Verschiebungen der Punkte $0,5$ und $37,5$ führen zu jenen Punkten des Kreisbogens des endgültigen Bogens, in denen die Tangente mit den an den Bogen anschließenden Geraden parallel ist (Abb. 11, Punkt C). Statt dieser Punkte wurden die Halbierungspunkte (H) der Ordinaten abgesteckt, die mit großer Annäherung auf die Übergangsbogen fallen und diese halbieren. Die Ordinate des Halbierungspunktes H ist somit $\frac{1}{2} \cdot (0,318 + 0,003) = 0,160$ m. Die Verschiebungskomponenten des Halbierungspunktes am Anfang und Ende des Bogens sind: $u_{0,5} = +2,10$ m, $v_{0,5} = -0,540 - 0,160 = -0,700$ m, bzw. $u_{37,5} = -4,92$ m, $v_{37,5} = -0,420 - 0,160 = -0,580$ m.

Die Länge der Übergangsbogen ist nach Gl. 25) $l = \frac{150}{403,5} \cdot 150 = 55,762$ m. Ihr Anfangspunkt vor den Halbierungspunkten liegt nach Gl. 31) im Abstände von $27,881 \cdot [1 - 0,000159] = 27,877$ m, während die Abszisse und die Ordinate ihres äußersten Punktes nach der Gl. 30)

$$x_B = 55,762 \cdot \left[1 - \frac{1}{40} \cdot \left(\frac{150}{403,5}\right)^4\right] = 55,762 \cdot [1 - 0,000477] = 55,735 \text{ m,}$$

$$y_B = 4 \cdot 0,321 \cdot \left[1 - \frac{1}{56} \cdot \left(\frac{150}{403,5}\right)^4\right] = 1,284 \cdot [1 - 0,000341] = 1,284 \text{ m}$$

sind. Die übrigen Punkte der Übergangsbogen können mit Hilfe der gemäß Abschnitt 8 zu verfertigenden Tabellen abgesteckt werden.

13. Korbbogen.

Mit Hilfe des Verschiebungsplanes bereitet auch das Abstecken von Korbbogen keine Schwierigkeiten. Der Absteckplan für den Korbbogen — ob mittels des zeichnerischen oder rechnerischen Verfahrens verfertigt — kann ebenso leicht hergestellt werden, wie bei einfachen Bogen. Wegen Mangel an Raum können wir für die Absteckung der Korbbogen kein eigenes Beispiel geben, doch wollen wir den Gedankengang des zu befolgenden Verfahrens in Anknüpfung an das vorige Beispiel hier besprechen.

Bei der Lösung des vorigen Beispiels lasse man die Anwendung des Korbbogens zu und stelle die Bedingung, daß der neue Bogen dem alten Bogen möglichst nahe bleibe. Als Nebenbedingung kann auch hier die Ständigkeit der Länge der Strecke befriedigt werden, doch sei dies jetzt außer acht gelassen.

Nach Verfertigung des Lageplanes des Standvielecks ist auch diesmal vor allem das relative Bild des Standvielecks — auf irgendeinen Versuchsbogen, eventuell einen Korbbogen bezogen — zu konstruieren. Im vorigen Beispiele hatte der Versuchsbogen einen Halbmesser von 405 m. Nach Konstruieren des relativen Bildes werden die Krümmungsverhältnisse desselben untersucht. Das vorige Beispiel vor Augen haltend, kann festgestellt werden, daß die Krümmung des relativen Bildes A' — abgesehen vom Anfang und Ende — zwischen

den mit 2,5 und 11,5, sowie den mit 25,5 und 34,5 bezeichneten Punkten zur Krümmung des Versuchsbogens entgegengesetzten Sinnes ist. Zwischen den mit 11,5 und 25,5 bezeichneten Punkten hingegen krümmen sich diese Kurven übereinstimmenden Sinnes. Der neue Bogen bietet sich somit als dreiteiliger Korbbogen dar, dessen relatives Bild sich ebenfalls aus drei Kreisbogen mit verschiedenen Halbmessern ergibt.

Um obige Bedingung befriedigen zu können, ist das relative Bild des Korbbogens so zu konstruieren, daß von ihm die Eckpunkte des relativen Bildes A' womöglich in halbe Spurweitenentfernung zu liegen kommen, weil diese Punkte am äußeren Schienenstrange des vorhandenen Bogens sind; der neue Bogen hingegen ist durch die Gleisachse bestimmt. Das relative Bild des Korbbogens, das abermals mit C' bezeichnet sei, wäre ungefähr mit folgenden drei Bogenhalbmessern herzustellen: $\delta R_1 = -30$ m, $\delta R_2 = +30$ m, $\delta R_3 = -25$ m. Diese Kreise bleiben voneinander und von den Geraden der Strecke in den den Übergangsbogen entsprechenden Abständen zurück. Der Verschiebungsplan $[A', C']$ bildet den Absteckplan des Korbbogens. Die Halbmesser des Korbbogens sind: $R_1 = 405 - 30 = 375$ m, $R_2 = 405 + 30 = 435$ m, $R_3 = 405 - 25 = 380$ m. Die fernere Bearbeitung des Absteckplanes geschieht ebenso wie bei den einfachen Bogen. Nebenbei sei noch bemerkt, daß es allgemein nicht üblich ist, Korbbogen mit so kleinen Halbmesserdifferenzen zu entwerfen.

Bei numerischer Lösung der Aufgabe nimmt man die Anfangsversuchskomponenten z. B. mit den Werten $u'_{0,5} = 0$, $v'_{0,5} = e_1 - f_1$ an. Nach vorigem Beispiel ist $e_1 = -0,520$ m. Von den Anfangswerten aus rechnet man mit den Gl. 9) der Reihe nach sämtliche Verschiebungen $u'_{x+\frac{1}{2}}$, $v'_{x+\frac{1}{2}}$ aus, die von der Standkurve zum Versuchsbogen mit dem Halbmesser von 405 m führen. Da der abzusteckende Korbbogen dreiteilig angenommen ist, beschließen wir auch, daß die Endtangente der einzelnen Kreisbogen außer der ersten und letzten Seite des Standvielecks auch mit den mit 11,5 und 25,5 bezeichneten Seiten parallel seien. Anstatt den letztgenannten Seiten können natürlich auch deren Nachbarn als Übergangstangenten unter den benachbarten Kreisbogen gewählt werden, wenn dies zur besseren Befriedigung oberer Bedingung wünschenswert erscheint. Die Halbmesser der einzelnen Kreisbogen seien nach obigen Werten gewählt und allgemein mit R_i bezeichnet, wo $i = 1, 2, 3$. Bedeutet R den Halbmesser des Versuchsbogens, so wird $\delta R_i = R_i - R$, $i = 1, 2, 3$, jener Halbmessenzuwachs sein, der aus dem Übergange vom Versuchs- zum Korbbogen entsteht. Die allgemeinen Gleichungen der Verschiebungen zwischen dem Korbbogen und Standvieleck werden also nach den Gl. 21)

$$\left. \begin{aligned} u_{x+\frac{1}{2}} &= u'_{x+\frac{1}{2}} + A_i \cdot \cos \tau_{x+\frac{1}{2}} - B_i \cdot \sin \tau_{x+\frac{1}{2}} \\ v_{x+\frac{1}{2}} &= \delta R_i + v'_{x+\frac{1}{2}} + A_i \cdot \sin \tau_{x+\frac{1}{2}} + B_i \cdot \cos \tau_{x+\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \dots 44)$$

($i = 1, 2, 3$)

sein, wo A_i und B_i von den Rand- und Anschlußbedingungen der Kreisbogen abhängige Festwerte sind.

Die Gl. 44) bilden den drei Kreisbogen des Korbbogens entsprechend drei Gruppen, aus denen die Verschiebungen der einzelnen Kreisbogen einzeln ausgerechnet werden können. So bieten die in die Gruppe $i = 1$ gehörigen Gleichungen die zum Kreisbogen $R_1 = R + \delta R_1$ führende Verschiebungen.

Hier ist somit $x = 0, 1, \dots, h$, wenn $h + \frac{1}{2}$ jene Seite des Standvielecks bedeutet, — in unserem Falle die mit 11,5 bezeichnete, — die mit den anschließenden Endtangente der Kreisbogen R_1 und R_2 parallel ist. Die Gleichungen der Gruppe $i = 2$ führen zum Kreisbogen $R_2 = R + \delta R_2$, und hier ist $x = h, h + 1, \dots, k$, wenn $k + \frac{1}{2}$ den letzten Berührungspunkt des Kreisbogens R_2 bezeichnet. Zum Schlusse bringen

die Gleichungen der Gruppe $i = 3$ den Kreisbogen $R_3 = R + \delta R_3$ mit der Wertereihe $x = k, \dots, n$ hervor.

Zwecks Feststellung der Festwerte der einzelnen Gleichungsgruppen bedenke man, daß die Verschiebungen der mit $h + \frac{1}{2}$ und $k + \frac{1}{2}$ bezeichneten Punkte auch aus zwei

Gleichungsgruppen gerechnet werden können. Die Verschiebung $u_{h+\frac{1}{2}}$ ist gleichgroß, ob sie aus der entsprechenden Gleichung der Gruppe $i = 1$ oder $i = 2$ gerechnet ist. Die Verschiebung $v_{h+\frac{1}{2}}$ hingegen wird aus beiden Gleichungen gerechnet nur dann gleichgroß sein, wenn zwischen den Kreisbogen R_1 und R_2 kein Übergangsbogen ist. Ist aber ein solcher vorhanden und liegen infolgedessen die anschließenden Tangente beider Kreisbogen voneinander in einem Abstände von f_2 , dann wird auch zwischen den aus den erwähnten Gleichungen gerechneten Werten $v_{h+\frac{1}{2}}$ ein Unterschied von f_2 bestehen. Dasselbe gilt auch

für die Verschiebungen des mit $k + \frac{1}{2}$ bezeichneten Punktes, wo der Abstand der Endtangente der Kreisbogen R_2 und R_3 mit f_3 bezeichnet wird. Subtrahiert man die aus je zwei Gleichungsgruppen gewinnbaren Ausdrücke der Verschiebungen voneinander, so gewinnt man betreffs der mit $h + \frac{1}{2}$ und $k + \frac{1}{2}$ bezeichneten Punkte zwei Anschlußbedingungen, die abgesehen mit je zwei Gleichungen ausgedrückt werden können. Die Bedingungen sind betreffs des mit $h + \frac{1}{2}$ bezeichneten Punktes:

$$\left. \begin{aligned} (A_1 - A_2) \cdot \cos \tau_{h+\frac{1}{2}} - (B_1 - B_2) \cdot \sin \tau_{h+\frac{1}{2}} &= 0, \\ \delta R_1 - \delta R_2 + (A_1 - A_2) \cdot \sin \tau_{h+\frac{1}{2}} + (B_1 - B_2) \cdot \cos \tau_{h+\frac{1}{2}} &= f_2 \end{aligned} \right\} \dots 45)$$

während sie betreffs des mit $k + \frac{1}{2}$ bezeichneten Punktes:

$$\left. \begin{aligned} (A_2 - A_3) \cdot \cos \tau_{k+\frac{1}{2}} - (B_2 - B_3) \cdot \sin \tau_{k+\frac{1}{2}} &= 0, \\ \delta R_2 - \delta R_3 + (A_2 - A_3) \cdot \sin \tau_{k+\frac{1}{2}} + (B_2 - B_3) \cdot \cos \tau_{k+\frac{1}{2}} &= f_3 \end{aligned} \right\} \dots 46)$$

sein werden. Kommt zwischen den Kreisbogen kein Übergangsbogen vor, so ist $f_2 = f_3 = 0$ zu ersetzen. Zur Bestimmung der sechs unbekannt Festwerte dienen noch beide Randbedingungen: $v_{0,5} = v'_{0,5} = e_1 - f_1$ und $v_{n+\frac{1}{2}} = e_4 - f_4$. Diese werden nach Substitutionen aus den Gl. 44):

$$\left. \begin{aligned} \delta R_1 + B_1 &= 0 \\ \delta R_3 + v'_{n+\frac{1}{2}} + A_3 \cdot \sin \alpha + B_3 \cdot \cos \alpha &= e_4 - f_4 \end{aligned} \right\} \dots 47)$$

sein, wo $\alpha = \tau_{n+\frac{1}{2}}$ ist. Nach Berechnung der Festwerte A_i , B_i aus den Gl. 45), 46), 47) können die Verschiebungen des Korbbogens aus den Gl. 44) ohne weiteres ausgerechnet werden.

Beim Abstecken von Korbbogen kann das regelmäßige Standvieleck ebenso vorteilhaft gebraucht werden wie bei den einfachen Bogen. Ja, die Verwendung des mehrteiligen regelmäßigen Standvielecks ist hier gerade wünschenswert, weil die Halbmesser der einzelnen Teilkreise an den Korbbogen angepaßt aufgenommen werden können; somit wird das relative Bild des abzusteckenden Korbbogens keinen großen Umfang annehmen. Eine eingehendere Besprechung des Absteckplanes ist nunmehr unnötig. Es genügt daher, auf das im Ende des Abschnittes 7 Gesagte nochmals hinzuweisen.

III. Anhang.

14. Differenzialgleichungen der Bogenabsteckung.

Im Abschnitt 4 stellten wir die Differenzialgleichungen der Bogenabsteckung her und wiesen darauf hin, daß diese Gleichungen nach dem Grenzübergange $\epsilon_x \rightarrow 0$ in Differenzialgleichungen übergehen. Zeichnet man nun die Abb. 3 dem sehr kleinen Winkel $\epsilon_x = d\tau$ entsprechend um und gebraucht dabei die dem Grenzübergange entsprechenden Bezeichnungen,

so gelangt man zur Abb. 15, aus der die gesuchten Differenzialgleichungen unmittelbar aufgeschrieben werden können. Da nämlich im Grenzübergang die Punkte H', L', K' sich einander nähern, so folgt, daß nach Grenzübergang $N'K' = \delta r - v$ sein wird. Die Differenzialgleichungen der Bogenabsteckung

kurve, f aber jener des abzusteckenden Bogens von den Geraden (t, t) der Strecke sind. In Abb. 16 zeichnen wir die Kurven A, B und B' zwecks Vereinfachung als Kreisbogen ein, obwohl die erklärten Zusammenhänge auch für allgemein gestaltete Kurven gültig sind.

In dem auf Abb. 16 dargestellten besonderen Fall ist die eine partikuläre Lösung der Gl. 48) $u' = 0, v' = \delta r = \delta R = \text{konst.}$, und somit ist ihre allgemeine Lösung

$$\left. \begin{aligned} u &= A \cdot \cos \tau - B \cdot \sin \tau \\ v &= \delta R + A \cdot \sin \tau + B \cdot \cos \tau \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 50).$$

Wie ersichtlich, sind diese Formeln 49) und 50) ähnlich aufgebaut wie die Formeln 15), 19) oder 21), woselbst die Standkurve und der abzusteckende Bogen durch deren Umhüllungsvieleck ersetzt wurde. Alle jene dortselbst gemachten Bemerkungen und Folgerungen erleiden bei der Erörterung der behandelten Kurven als stetige Linien weder eine Erweiterung noch eine Beschränkung.

15. Kritische Bemerkungen über einige Annäherungsverfahren.

Unter den Längs- und Querverschiebungen haben die letztgenannten die größere Bedeutung. Die Längsverschiebungen entstehen nämlich in der Richtung der Tangente und sind somit auf die Lage des Bogens nicht von größerem Einfluß. Ja, sie können, besonders wenn sie — wie dies bei der Berichtigung der Bogen zu sein pflegt — klein sind, auch ganz außer acht gelassen werden. In diesem Falle liefert die Lösung des Problems die lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung, die aus dem System 48) durch Ausschaltung von u gewonnen wird:

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} + v = \delta r \dots \dots \dots 51).$$

Um zu der Differenzialgleichung der in der Einleitung erwähnten angenäherten Verfahren zu gelangen, vernachlässige man den klein vorausgesetzten Wert v auf der linken Seite der Gl. 51). Die so gewonnene Gleichung

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} = \delta r \dots \dots \dots 52)$$

ist die Differenzialgleichung der erwähnten Verfahren (Nalenz, Lefort u. a.), aus der durch zweimalige Integration die den alten Bogen mehr oder minder regelmäßig gestaltenden Querverschiebungen erhalten werden können.

Aus Gl. 52) kann die Grundgleichung der erwähnten Verfahren — mittels der die früheren Zusammenhänge darstellenden Abb. 17 — abgeleitet werden. Da in der Abb. 17 ein Bogenelement des relativen Bogenbildes $B'B'_x B'_1 = \delta r \cdot d\tau = d\delta s$ ist, so wird die erste Quadratur der Gl. 52)

$$\frac{dv}{d\tau} = \delta s + u_0 \dots \dots \dots 53)$$

sein. Hier bedeutet der Integralfestwert u_0 nach der Gl. 48) die zu $\delta s = 0$ gehörige Längsverschiebung im Anfangspunkt der Bogenmessung.

Es seien die Anfänge der Bogenlängenmessung an den Bogen A, B und B' der Reihe nach in den entsprechenden Punkten A_0, B_0 und B'_0 , deren Tangenten parallel sind. Bilden A_x, B_x und B'_x ein entsprechendes Punkttupel, so wird $\widehat{A_0 A_x} = s, \widehat{B_0 B_x} = s + \delta s$ und $\widehat{B'_0 B'_x} = \delta s$ sein. Am Bogen B bezeichnen wir mit E_x jenen Punkt, dessen Bogenabstand vom Punkte B_0 mit dem Bogenabstand des Punktes A_x von A_0 übereinstimmt.

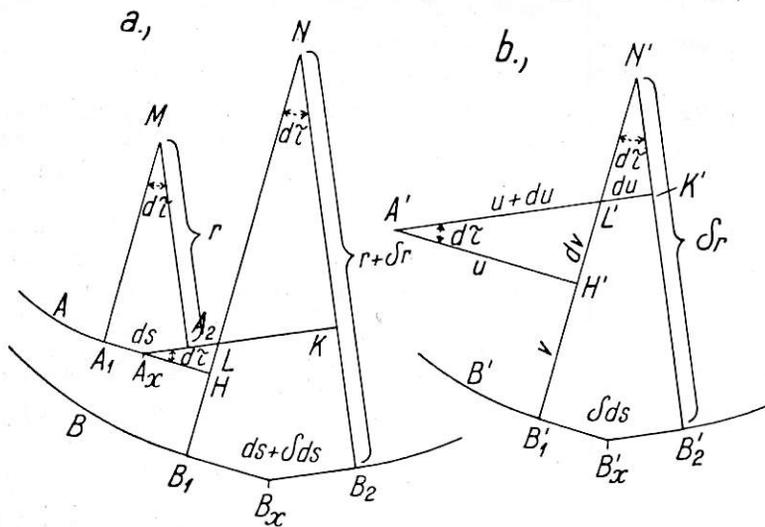


Abb. 15. Teilzeichnung aus dem Lageplan des Bogens und der Standkurve, sowie aus ihrem gegenseitigen Verschiebungsplan.

ergeben sich aus den Zusammenhängen der Dreiecke $N'K'L'$ und $A'H'L'$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{d\tau} + v &= \delta r \\ \frac{dv}{d\tau} - u &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 48).$$

Dieses lineare Differenzialgleichungssystem erster Ordnung bestimmt bis auf zwei Integralfestwerte die Verschiebungskomponenten der parallelen Tangenten und der Berührungspunkte des abzusteckenden Bogens und

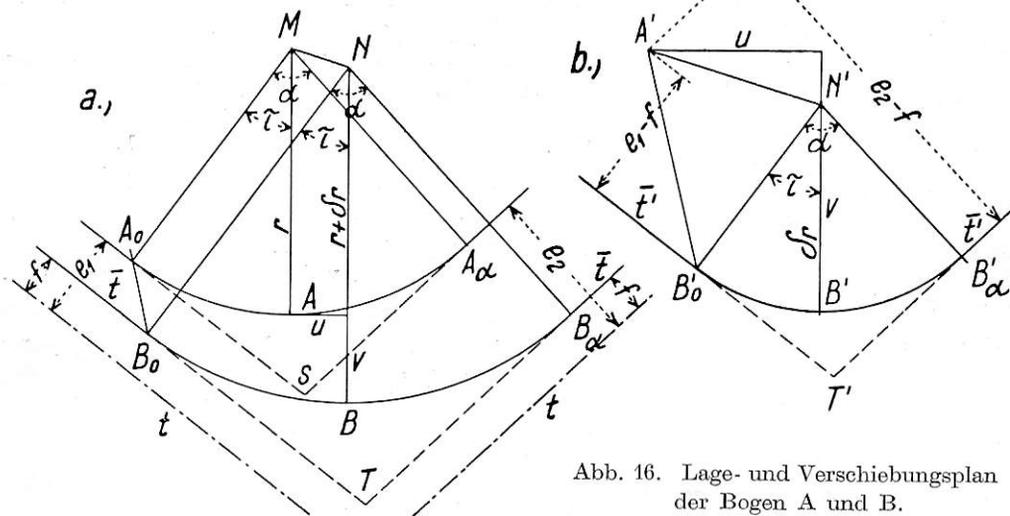


Abb. 16. Lage- und Verschiebungsplan der Bogen A und B.

der Standkurve, falls die Veränderung des Krümmungshalbmesser-Zuwachses δr in der Funktion des τ bekannt ist. Ist u', v' eine partikuläre Lösung der Gl. 48), so wird ihre allgemeine Lösung

$$\left. \begin{aligned} u &= u' + A \cdot \cos \tau - B \cdot \sin \tau \\ v &= v' + A \cdot \sin \tau + B \cdot \cos \tau \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 49)$$

sein. Die Integralfestwerte A und B sind aus den Randbedingungen $v_0 = e_1 - f$ und $v_\alpha = e_2 - f$ festzustellen (Abb. 16). Hier bedeuten v_0 und v_α die den Tangentenwinkeln $\tau = 0$ und $\tau = \alpha$ entsprechenden Querverschiebungen, während e_1 und e_2 die Abstände der Anfangs- und Endtangente der Stand-

Wegen ihrer gleichen Bogenabstände nennen wir A_x und E_x isometrische Punkte. Also ist $\widehat{B_0 E_x} = \widehat{A_0 A_x} = s$ und $\widehat{E_x B_x} = \delta s$. Der Neigungswinkel der Tangente von E_x mit der Tangente der Punkte A_x bzw. B_x ist $\delta\tau$. (Bezüglich des Gebrauchs des Zeichens δ vergl. das in Abschnitt 3 Gesagte). Nun gewinnt man aus Gl. 53) durch wiederholtes Integrieren folgenden Ausdruck für die Querverschiebungen der Bogen A und B:

$$v = \int_0^x \delta s \cdot d\tau + u_0 \cdot \tau + v_0 \dots 54),$$

wo der neuere Integralwert v_0 die Querverschiebung der Anfangspunkte A_0, B_0 bedeutet. Die Integralveränderliche τ ist an der unteren Grenze Null, sie nimmt an der mit x bezeichneten oberen Grenze den mit der Anfangstangente gebildeten Neigungswinkel der Tangente von A_x auf. Aus Gl. 54) gelangen wir mittels der gleich zu beweisenden Substitution

$$\delta s \cdot d\tau = ds \cdot \delta\tau \dots 55)$$

zur Grundgleichung der erwähnten Verfahren:

$$v = \int_0^x \delta\tau \cdot ds + u_0 \cdot \tau + v_0 \dots 54*),$$

wo die Integralveränderliche s an der unteren Grenze gleich Null ist; an der oberen Grenze aber nimmt sie die Bogenlänge des Punktes A_x an. Um diese Gleichungen des Näheren erklären zu können, untersuchen wir wie folgt in Abb. 17 die durch die Punkte A_0, B_0 und B'_0 gehenden Evolventen und stellen deren Zusammenhänge fest.

Ein Bogenelement der zu Punkt B'_0 gehörigen und mit E' bezeichneten Evolvente ist $\delta s \cdot d\tau$. Das Integral in Gl. 54)

bedeutet die Bogenlänge $\widehat{B'_0 B'_{0,x}}$ dieser Evolvente, wenn man mit $B'_{0,x}$ den Schnittpunkt der Evolvente und der Tangente des Punktes B'_x bezeichnet. Der in Gl. 54) rechts stehende Ausdruck wird also mit der Länge der Linie $FG \widehat{B'_0 B'_{0,x}}$ gleich sein, wo $A'G = u_0$ mit der Tangente von B'_0 , $A'F = u_0$ aber mit jener des Punktes B'_x parallel ist. Demzufolge würde die Verschiebung v die Länge dieser Linie geben, während ihr wirklicher Wert die Projektion dieser Linie auf das Lot der Tangenten von B'_x ist. Es folgt daraus, daß der Wert v auch aus den obigen Gleichungen richtig gewonnen werden könnte, wenn man die Integration und Addition als Summierung im geometrischen Sinne auffassen könnte, und in die Gleichung auch noch die außer acht gelassene Längverschiebung $u - u_0$ eingehen sollte. Die obigen Gleichungen wären also durch Vektorgleichungen zu ersetzen.

Die parallelen Bogenelemente der durch die Anfangspunkte A_0, B_0 und B'_0 gehenden Evolventen entsprechen bezüglich der parallelen Tangenten und Berührungspunkten einander. In dieser Beziehung bilden also auch die an den parallelen Tangenten liegenden Evolventenpunkte $A_{0,x}, B_{0,x}, B'_{0,x}$ ein entsprechendes Punkttupel. Aus dem Prinzip der von uns angewandten Relativität folgt, daß $\widehat{B'_0 B'_{0,x}} = \widehat{B_0 B_{0,x}} - \widehat{A_0 A_{0,x}}$ ist, d. h. die Länge der Evolvente des relativen Bildes ist gleich dem Unterschiede der entsprechenden Evolventenlängen beider Bogen. Allgemein kann behauptet werden, daß der Unterschied der entsprechenden Evolvente zweier Bogen auch für sich eine Evolvente ist.

Aus demselben Grundsatz folgt ferner, daß die Verschiebung der Punkte $A_{0,x}$ und $B_{0,x}$ sich aus dem Verschiebungsplane 17 b ergibt, also ist $\widehat{A_{0,x} B_{0,x}} = \widehat{A' B'_{0,x}}$. Der mit dieser Verschiebung parallele Vektor $\overline{A_x D}$ bestimmt an der

Tangente von B_x einen Punkt D , der an der zu Punkt E_x gehörigen Evolvente liegt. Nachdem wir den Neigungswinkel $\delta\tau$ allgemein sehr klein voraussetzen, kann die Verschiebung $\overline{A_x E_x}$ mit der Verschiebung $\overline{A_x D} = \overline{A_{0,x} B_{0,x}} = \overline{A' B'_{0,x}}$ gleichgroß angenommen werden. Führt man in den Verschiebungsplan auch noch die Verschiebung $\overline{A' E'_x} = \overline{A_x E_x}$ ein, so kann

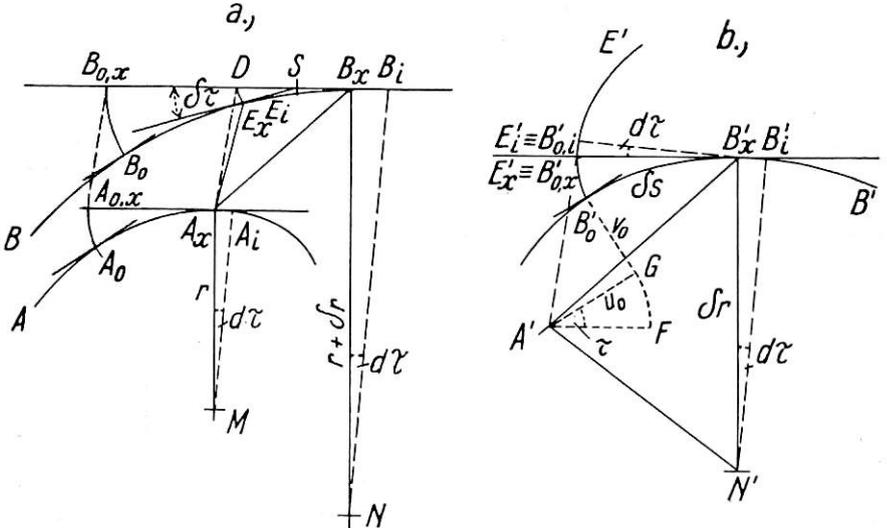


Abb. 17. Verschiebungen zweier Bogen und Zusammenhang der entsprechenden Evolventen derselben.

der Punkt E'_x mit $B'_{0,x}$ als identisch betrachtet werden, also ist $E'_x \equiv B'_{0,x}$. Die relative Verschiebungslinie der isometrischen Punkte deckt somit die Evolvente E' mit großer Annäherung. Die Bogenelemente dieser Linie können mittels Abb. 18 wie folgt berechnet werden. Die relative Verschiebung der Endpunkte der isometrischen Bogenelemente $\overline{A_x A_i} = \overline{E_x E_i} = ds$ ist $\overline{F E_i}$, wenn F den durch die Parallelen $E_x F \parallel A_x A_i$ und $A_i F \parallel A_x E_x$ bestimmten Punkt bedeutet. Infolge der Geringfügigkeit des Winkels $\delta\tau$ ist $\overline{F E_i} = ds \cdot \delta\tau$. Für die Bogenelemente der Evolvente E' erhalten wir somit zwei Ausdrücke, aus deren mit großer Annäherung bestehenden Gleichheit folgt, daß $\delta s \cdot d\tau = ds \cdot \delta\tau$ ist. Damit ist Gl. 55) bewiesen.

(Die Gl. 54) und 54*) decken sich somit mit einer vom analytischen Standpunkte aus einwandfreien Annäherung. Diese Annäherung ist um so vollkommener, je geringere Werte $\delta\tau$ und δs in der gegenseitigen Beziehung beider Bogen auftauchen. Ganz anders steht der Fall bei den Gl. 51) und 54), deren Ergebnisse im allgemeinen Falle voneinander wesentlich abweichen.

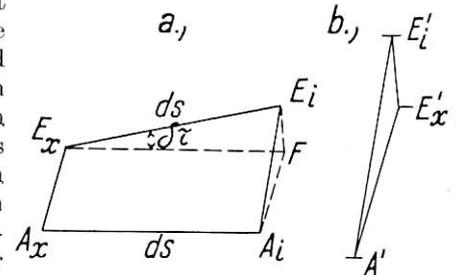


Abb. 18.

Die Gl. 54*) kann leicht in jene Gestalt gebracht werden, die beim

Verfahren der Pfeilhöhendifferenzen oder Evolventendifferenzen gebräuchlich ist. Im Abschnitte 1 wurden die Winkel

$d\tau = \epsilon_x = \frac{2h_x}{\sigma}$ der am alten Bogen liegenden Standkurve A

in den Abständen $ds = \sigma$ mit den Pfeilhöhen gemessen. Ebenso verfähre man jetzt auch am Bogen B und bezeichne mit h'_x dortselbst die der Sehnenteilung σ entsprechende Pfeilhöhen. Dann ist der Neigungswinkel beider isometrischen Bogenelemente:

$$\delta\tau_{x+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sigma} \sum (h'_x - h_x) \dots 56).$$

Mittels Substitution von 56) und $ds = \sigma$, ferner bei Austausch des Integralzeichens mit dem Summenzeichen wird aus Gl. 54*)

$$v_{x+1} = 2 \sum \sum (h'_x - h_x) + u_0 \cdot \tau_{x+\frac{1}{2}} + v_0 \dots \dots \dots 57).$$

Diese Gleichung ist die wohlbekannte Gestalt der Grundgleichung der erwähnten Verfahren, in der gewöhnlich $u_0 = v_0 = 0$ gesetzt ist. Auch diese Gleichung ist einwandfrei, wenn nebst $u_0 = v_0 = 0$ die zweite Summation in geometrischem Sinne aufgefaßt und der so gewonnene Vektor in Richtung von v projiziert wird.

Zur Beleuchtung der Ungenauigkeit der erwähnten Verfahren stellen wir die Verschiebungen zweier Kreise mit Hilfe der Gl. 54) her, und vergleichen die so gewonnene Formel mit der aus der Gl. 50₂) sich ergebenden Formel. Ist der Unterschied des Halbmessers beider Kreise δR , dann ergibt sich mittels Substitution von $\delta s = \delta R \cdot \tau$ aus der erstgenannten die Formel:

$$v = \delta R \cdot \frac{1}{2} \tau^2 + u_0 \cdot \tau + v_0 \dots \dots \dots 58),$$

aus der zweiten aber die Formel:

$$v = \delta R + u_0 \cdot \sin \tau + (v_0 - \delta R) \cdot \cos \tau \dots \dots 59).$$

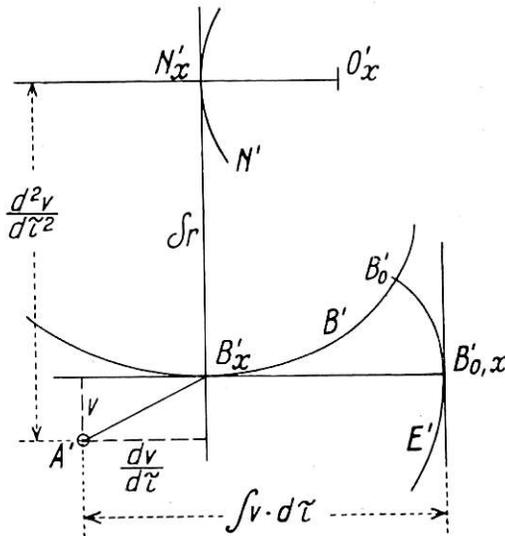


Abb. 19. Die Evolute und die Evolventen des relativen Bildes.

Aus dem Vergleiche wird klar, daß die den genauen Wert liefernde Gl. 59) nur dann in die Gestalt der Gl. 58) gebracht werden kann, wenn τ und v_0 klein ist. In diesem Falle können nämlich $\sin \tau = \tau$ und $\cos \tau = 1 - \frac{1}{2} \tau^2$ substituiert werden, der Wert $v_0 \cdot \frac{1}{2} \tau^2$ aber kann vernachlässigt werden. Vom analytischen Standpunkte aus gibt somit die Gl. 58) und mit ihr auch die erwähnten Verfahren nur dann befriedigende Ergebnisse, wenn τ nicht groß ist und die Verschiebungen gering sind.

16. Die Rolle des relativen Bildes in der graphischen Integration der Differenzialgleichungen.

In Abb. 19 ist der dem Bogen A entsprechende Pol A', das relative Bild B' des Bogens B, ferner die Evolute N' und eine Evolvente E' des Bogenbildes B' dargestellt. Die Tangenten und Normalen der zusammengehörigen Punkte B'x, N'x, B'0,x sind parallel. Die Abstände des Poles A' von diesen Tangenten und Normalen ergeben die Verschiebungskomponenten des Bogenpunktes Bx, des Krümmungsmittelpunktes Nx und des Evolventenpunktes B0,x von den entsprechenden Elementen des Bogens A. Bezeichnet man den Abstand des Pols A' von der Tangente des Punktes B'x auch diesmal mit v, dann folgt

aus den Gl. 48₂) und 51), daß der Pol A' von der Tangente des Punktes N'x im Abstände $u = \frac{dv}{d\tau}$, von seiner Normalen aber im Abstände von $\frac{d^2v}{d\tau^2}$ liegt.

Das gegenseitige Verhältnis bei den Kurven E' und B' ist das gleiche wie bei B' und N'. Deswegen ist der Abstand des Pols A' von der Tangente des Punktes B'0,x gleich dem Integral $\int v \cdot d\tau$, deren erste Ableitung genau mit dem Abstände v des Pols A' von der Tangente des B'x gleich ist. Die Unbestimmtheit des Integrals entspricht der Unbestimmtheit der Evolvente. Fixiert man die Evolvente des Bogenbildes, so wird auch das Integral bestimmt sein, und umgekehrt, zu jedem bestimmten Integral gehört eine bestimmte Evolvente.

Das eben vorgetragene führt uns zu jenem Gedankenkreise, den Lord Kelvin, E. Meissner und ihre Anhänger für die graphische Integration der Differenzialgleichungen — auf anderen Wegen — ausgebaut haben. Geht man von der Kurve B' aus, die neben dem Pol A' durch irgendeine Funktion $v(\tau)$ und deren erste Ableitung völlig bestimmt wird, so können ihre Evoluten und Evolventen erster und höherer Ordnung samt B' konstruiert werden. Der Abstand der Tangenten der einzelnen Evoluten und Evolventen vom Pol A' stellt die Ableitungen bzw. Quadraturen erster und höherer Ordnung der Funktion $v(\tau)$ dar. All diese Kurven können mit irgendeiner die Funktion $v(\tau)$ bestimmenden Differenzialgleichung in Verbindung gebracht werden; gelingt es, eine dieser Kurven mit Hilfe der Differenzialgleichung zu konstruieren, so wird gleichfalls auch die graphische Integration der Gleichung möglich sein. Um dies erreichen zu können, sind zu dieser derartig konstruierten Kurve noch die entsprechenden Evoluten oder Evolventen zu konstruieren, damit das die Funktion $v(\tau)$ bestimmende Bogenbild B' gewonnen werden kann.

Diese Verbindungen benützten auch wir bei der Lösung der uns gestellten Aufgabe. Auch kann zum Schluß noch festgestellt werden, daß wir zwecks Lösung unserer Aufgabe durch das unmittelbare Konstruieren des im Mittelpunkte der fraglichen Kurven stehenden und die Funktion $v(\tau)$ bestimmenden relativen Bildes zugleich das möglichst zweckdienliche Verfahren wählten.

17. Schlußwort.

Durch diese Arbeit verfolgten wir ein zweifaches Ziel. Einerseits wollten wir für die Aufgaben der Bogenabsteckung und Bogenberichtigung ein ebenso einfaches wie genaues Verfahren geben, andererseits verknüpften wir unser Vorhaben mit der Darstellung einer Theorie, die nebst richtiger Beleuchtung des in Frage stehenden Problems auch zur richtigen Beurteilung einzelner angenäherter Verfahren verhilft. Auf Grund unserer Forschungen können aber auch andere angenäherte Verfahren durchgebildet werden, beispielsweise ein solches, das durch zweckmäßige Wahl der Standkurve nebst gleichgroßen Winkeln auf die Gl. 54) aufgebaut werden könnte. Dieses sonst bemerkenswerte Verfahren könnte mit Bezug auf die Annäherung samt den erörterten angenäherten Verfahren derselben Beurteilung anheimgestellt werden, es könnte somit nur in begrenzten Fällen gebraucht werden. Anstandslose Annäherungsverfahren können durch Lösung unserer Gleichungen mittels allgemein gültiger Annäherung gebildet werden, wozu aus dem Schrifttum der Theorie der Differenzialgleichungen reichlich Stoff vorliegt. Unsererseits wollen wir aber vorläufig in eine solche Erörterung nicht eintreten; wir erachten dies auch für überflüssig, da das hier vorggeführte, streng genaue Verfahren mit Bezug auf Einfachheit und Übersichtlichkeit den angenäherten Verfahren kaum nachgesetzt werden kann.