INDUKTIONSSTÖRNINGAR I SVAGSTRÖMSLEDNINGAR FRÅN ENFASIG VÄXELSTRÖMSLEDNING MED ÅTERLEDNING GENOM SKENOR OCH JORD.

Vi antaga, att ström och spänning i högspänningsledningen äro enkelt harmoniska funktioner af tiden, samt att samma är förhållandet med de inducerade strömmarne och spänningarne. Ledningskonstanter och elektriska storheter hos högspänningsledningen beteckna vi med index 1; om flera dylika ledningar förekomma, beteckna vi deras konstanter med indices 1, 2, 3 etc. Motstånd, självinduktionskoeff., potentialkoeff., läckningskoeff., elektrisk laddning, strömstyrka och potential beteckna vid med bokstäfverna r, l, k, a, q s, v resp. Ömsesidiga induktions- och potentialkoefficienter beteckna vi med m och k med indices för båda ledningarne. x är längdkoordinaten utefter lågspänningsledningen. Såsom enhet för längden använda vi en kilometer.

För korta ledningar kan telegraf- och telefonledningarne utan vidare behandlas såsom i elektriskt hänseende stela system; men i samma mån som ledningarnes längd ökas, kommer ledningarnes elektriska elasticitet att inverka, så att elektrisk vågbildning uppkommer. En mer fullständig teori måste taga denna omständighet med i räkningen för att kunna tillämpas på praktiska förhållanden.

Innan vi därför ingå på att behandla teorien för induktionen, torde det vara lämpligt att i korthet genomgå en undersökning af de lagar, som gälla om elektriska strömmar i långa ledningar.

TEORI FÖR ELEKTRISKA STRÖMMAR MED GIFVET PERIODTAL I LÅNGA LEDNINGAR.

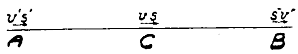

Bild 151.

Vi låta AB utgöra en homogen del af en elektrisk strömkrets. Strömmarne i ledningens olika punkter antagas vara enkelt harmoniska med frekvensen n och vinkelhastigheten $\omega = 2\pi n$. v' och v'' samt s' och s'' äro spänningar och strömstyrkor vid ledningens båda ändpunkter A och B. Om ledningen är kort, kan man som bekant sätta $s' = s'' = s$ och $v' - v'' = (r_1 + i\omega l_1)s$. Då ledningen är mycket lång, är detta icke längre tillåtet och vår undersökning skall hufvudsakligen inriktas på att bestämma den lag, som i detta fall ersätter den Ohmska lagen. Afståndet från punkten A till en godtycklig punkt C kalla vi x och spänning och ström i denna punkt resp. v och s. Ledningens laddning pr km kalla vi q. Vi hafva då följande relationer:

$$\left\{\begin{aligned} & r_1 s + l_1 \frac{ds}{dt} = -\frac{dv}{dx} \\ & \frac{dq}{dt} + a_1 v = -\frac{ds}{dx} \\ & \quad q = c_1 v \end{aligned}\right. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Vi skola söka en lösning till detta system, som är enkelt harmonisk med vinkelhastigheten ω. Som emellertid ekvationerna äro linjära i $v, s, q, \frac{dv}{dx}, \frac{ds}{dx}, \frac{ds}{dt}$ och $\frac{dq}{dt}$ med reella koefficienter, så om $\varphi(x) \cdot e^{i\omega t}$ är en lösning för en af de obekanta, så är såväl den reella som den imaginära delen en lösning, en linjär kombination af dem är också en lösning, och en enkelt harmonisk lösning hvilken som helst kan sammansättas genom en sådan linjär kombination. Vi skola därför söka en lösning af denna form. Vi se då att $\frac{d}{dt} = i\omega$.

Om vi använda oss af grafisk åskådningsmetod, kunna vi låta s, q och v representeras af vektorer från origo till motsvarande komplexa värden i ett plan. En operation sådan som t. ex. $\frac{d}{dt}(s)$ eller $i\omega s$ ger oss då en vektor som ligger 90° före s i fas, om fasvinkeln räknas positiv från reella axeln mot den imaginära. För att få en grafisk representation af s:s värde vid olika ögonblick kan man låta en »tidslinje» rotera med konstanta vinkelhastigheten ω i motsatt riktning och låta den vid $t = 0$ ligga utefter den imaginära axeln. Om vi då af den komplexa lösningen behålla den imaginära delen, få vi det ögonblickliga värdet genom att projiciera vektorn på tidslinjen. Vi skola i det följande begagna denna symboliska metod. Den skiljer sig något från Steinmetz' i afseende på tidslinjens rotationsriktning och därigenom att Steinmetz sätter $\frac{d}{dt} = - i\omega$. Vid öfvergång från kalkyl till grafisk åskådning och tvärtom synes undertecknad ofvan angifna metod dock vara mer klar och öfverskådlig.

Om vi insätta $\frac{d}{dt} = i\omega$ och eliminera q och v mellan våra ekvationer, erhålles för bestämmande af s:

$$(r_1 + i\omega l_1)(a_1 + i\omega c_1) s - \frac{d^2 s}{dx^2} = 0$$

Vi införa här:

$$b^2 = (r_1 + i\omega l_1)(a_1 + i\omega c_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

alltså

$$\frac{d^2 s}{dx^2} = b^2 s,$$

hvaraf

$$s = (Ae^{bx} + Be^{-bx})\, e^{i\omega t}.$$

Den mot s svarande spänningen v erhålles sedan ur ekvationen:

$$v = -\frac{\frac{ds}{dx}}{a_1 + i\omega c_1} = -\frac{b}{a_1 + i\omega c_1}\left\{Ae^{bx} - Be^{-bx}\right\} e^{i\omega t} =$$

$$= -\sqrt{\frac{r_1 + i\omega l_1}{a_1 + i\omega c_1}}\left\{Ae^{bx} - Be^{-bx}\right\} e^{i\omega t}.$$

Vi antaga nu att vi känna v' och s' och skola däraf bestämma v och s i en punkt hvilken som helst.

Vi hafva sålunda villkoret

$$x = 0, \quad v = v' \text{ och } s = s',$$

således:

$$s' = (A + B) e^{i\omega t}$$

$$v' = -\sqrt{\frac{r_1 + i\omega l_1}{a_1 + i\omega c_1}}\,(A - B) e^{i\omega t},$$

alltså

$$2\,Ae^{i\omega t}=s'-v'\sqrt{\frac{a_1+i\omega c_1}{r_1+i\omega l_1}}$$

$$2\,Be^{i\omega t}=s'+v'\sqrt{\frac{a_1+i\omega c_1}{r_1+i\omega l_1}}.$$

Om vi insätta dessa värden i v och s, erhålles:

$$s=\frac{s'}{2}(e^{bx}+e^{-bx})-\frac{v'}{2}\sqrt{\frac{a_1+i\omega c_1}{r_1+i\omega l_1}}(e^{bx}-e^{-bx})$$

$$\sqrt{\frac{a_1+i\omega c_1}{r_1+i\omega l_1}}\,.\,v=-\frac{s'}{2}(e^{bx}-e^{-bx})+\frac{v'}{2}\sqrt{\frac{a_1+i\omega c_1}{r_1+i\omega l_1}}(e^{bx}+e^{-bx}).$$

Vi se sålunda att v och s äro linjära i v' och s' med koefficienter som äro funktioner af x.

För det följande är det lämpligare att bestämma v och v' ur s och s'. Om vi lösa ut v och v', få vi följande fundamentalformler:

$$\begin{cases} v'=s'\sqrt{\dfrac{r_1+i\omega l_1}{a_1+i\omega c_1}}\cdot\dfrac{e^{bx}+e^{-bx}}{e^{bx}-e^{-bx}}-s\sqrt{\dfrac{r_1+i\omega l_1}{a_1+i\omega c_1}}\cdot\dfrac{2}{e^{bx}-e^{-bx}} \\ v\;=s'\sqrt{\dfrac{r_1+i\omega l_1}{a_1+i\omega c_1}}\cdot\dfrac{2}{e^{bx}-e^{-bx}}-s\sqrt{\dfrac{r_1+i\omega l_1}{a_1+i\omega c_1}}\cdot\dfrac{e^{bx}+e^{-bx}}{e^{bx}-e^{-bx}} \end{cases}$$

eller om vi införa:

$$\begin{cases} I=\sqrt{\dfrac{r_1+i\omega l_1}{a_1+i\omega c_1}}\cdot\dfrac{e^{bx}+e^{-bx}}{e^{bx}-e^{-bx}} \\ A=\sqrt{\dfrac{r_1+i\omega l_1}{a_1+i\omega c_1}}\cdot\dfrac{2}{e^{bx}-e^{-bx}} \end{cases} \quad\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

$$v'=Is'-As$$
$$v=As'-Is$$

eller om vi införa v'' och s'' i stället för v och s

$$\begin{cases} v'=Is'-As'' \\ v''=As'-Is'' \end{cases} \quad\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

Dessa äro de ekvationer, som ersätta den Ohmska lagen. Genom att subtrahera erhålles:

$$v'-v''=(I-A)(s'+s'')=2\,(I-A)\,.\,\frac{s'+s''}{2}.$$

Denna ekvation liknar mycket den Ohmska lagen; i stället för strömstyrkan står aritmetiska mediet mellan strömmarne i ledningens båda ändar.

Genom att addera:

$$\frac{v'+v''}{2}=\frac{I+A}{2}(s'-s'').$$

Denna likhet motsvarar ekvationen för »afledningen» och kapacitetsströmmen vid korta ledningar.

Vi skola nu öfvergå att tolka betydelsen af I och A. Om $s''=0$, d. v. s. ledningen isolerad i sin bortre ända, se vi att $I=\frac{v'}{s'}$, d. v. s. motsvarar isolationsmotståndet uppmätt från A. Vi kalla därför i det följande I för isolationsoperatorn från A. Sätta vi $v''=0$, d. v. s. antaga ledningen vid ändan B förenad med jord, få vi:

$$v' = \frac{I^2 - A^2}{I} \, . \, s'.$$

Vi införa

$$R = \frac{I^2 - A^2}{I} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

R motsvarar då ledningens motstånd uppmätt från A. Vi kalla därför R hädanefter motståndsoperatorn.

Antaga vi $s'' = 0$ få vi:

$$v'' = As'.$$

A anger alltså förhållandet mellan spänningen i ledningens isolerade ända och den ström som ingår i den andra. Något särskildt namn på A torde icke behöfvas, emedan vi i det följande skola operera endast med R och I.

Mellan R och I bestå en del relationer. Om vi ur (3) och (5) bestämma R uttryckt i x få vi:

$$R = \sqrt{\frac{r_1 + i\omega l_1}{a_1 + i\omega c_1}} \cdot \frac{e^{bx} - e^{-bx}}{e^{bx} + e^{-bx}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Hopmultiplicera vi R och I erhålles:

$$RI = \frac{r_1 + i\omega l_1}{a_1 + i\omega c_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Produkten af R och I är sålunda oberoende af ledningens längd.

Om vi utveckla I, A och R i potensserie på bx, få vi följande för beräkningar nyttiga formler:

$$I = \sqrt{\frac{r_1 + i\omega l_1}{a_1 + i\omega c_1}} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2!} b^2 x^2 + \frac{1}{4!} b^4 x^4 + \ldots}{1 + \frac{1}{3!} b^2 x^2 + \frac{1}{5!} b^4 x^4 + \ldots} \cdot \frac{1}{bx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$A = \sqrt{\frac{r_1 + i\omega l_1}{a_1 + i\omega c_1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{3!} b^2 x^2 + \frac{1}{5!} b^4 x^4 + \ldots} \cdot \frac{1}{bx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$R = \sqrt{\frac{r_1 + i\omega l_1}{a_1 + i\omega c_1}} \cdot \frac{1 + \frac{1}{3!} b^2 x^2 + \frac{1}{5!} b^4 x^4 + \ldots}{1 + \frac{1}{2!} b^2 x^2 + \frac{1}{4!} b^4 x^4 + \ldots} \cdot bx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

För korthetens skull införa vi:

$$u(x) = \frac{1 + \frac{1}{3!} b^2 x^2 + \frac{1}{5!} b^4 x^4 + \ldots}{1 + \frac{1}{2!} b^2 x^2 + \frac{1}{4!} b^4 x^4 + \ldots} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$z(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{3!} b^2 x^2 + \frac{1}{5!} b^4 x^4 + \ldots}$$

Således:

$$\left\{\begin{aligned} I &= \frac{1}{(a_1 + i\omega c_1)x} \cdot \frac{1}{u(x)} \\ A &= \frac{1}{(a_1 + i\omega c_1)x} \cdot z(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12) \\ R &= (r_1 + i\omega l_1)x \, . \, u(x). \end{aligned}\right.$$

$u(x)$ kalla vi hädanefter för termen beroende på vågbildningen. Vi se nämligen att det är denna term, som utgör skillnaden mellan uttrycken för I, A och R vid långa och korta ledningar. Vi skola hädanefter kalla en ledning kort, när termen $u(x)$ kan negligeras (d. v. s. sättas $= 1$).

Om vi som fordran härför uppställa att $u(x)$ mindre än 1 % skall skilja sig från 1, få vi följande villkor för »kort ledning»:

$$x \leq \frac{0{,}173}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

När x går mot ∞ komma I, A och R att gå mot följande gränsvärden:

$$\begin{cases} I_\infty = \sqrt{\dfrac{r_1 + i\omega l_1}{a_1 + i\omega c_1}} \\ A_\infty = 0 \\ R_\infty = \sqrt{\dfrac{r_1 + i\omega l_1}{a_1 + i\omega c_1}} \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Dessutom få vi:

$$\lim xu(x) = \frac{1}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14')$$

Vi se sålunda att I och R närma sig samma värden.

Ehuru i och för sig af stort intresse skola vi icke uppehålla oss vid att undersöka huru dessa konstanter ändras med ledningens längd, emedan vid de låga periodtal, som vid elektrisk järnvägsdrift förekomma, denna sak är af mindre betydelse. Blott så mycket torde behöfva nämnas, att R i början till värdet ökas med x, under det fasvinkeln minskas. Ökningen i värdet fortgår till dess att fasvinkeln blir lika med den slutliga fasvinkeln, då R har ett värde större än det slutliga värdet, hvarefter R:s värde börjar minskas. Fasvinkeln går öfver ett stycke på negativa sidan om slutlinjen, hvarefter fasvinkeln börjar ökas. R:s värde minskas fortfarande till dess fasvinkeln ånyo uppnått slutlinjen (då R har ett värde mindre än det slutliga), hvarefter R börjar ökas. Sedan svänger på så sätt R omkring slutliga läget med allt mindre och mindre amplituder och uppnår maximi- och minimivärden, då fasen sammanfaller med slutfasen. Maximi- och minimivärdena närma sig asymptotiskt det slutliga värdet. Om vi sätta $b = \beta + i\alpha$ blir $\frac{2\pi}{\alpha}$ det stycke af ledningens längd på hvilket en period inträffar. Ju större β desto starkare dämpning såväl i fassvängningarne som i maximi- och minimivärdenas närmande till slutvärdet. Hvad I beträffar, ligger den alltid symmetriskt med afseende till slutliga faslinjen i förhållande till R. Som produkten af R och I är konstant, så minskas I när R ökas och tvärtom.

Vi antaga nu att vår ledning AB icke längre består af en homogen ledning, utan tänka oss den bestå af två homogena delar med ledningskonstanterna I, A, R och I', A', R'. Med tillämpande af föregående formler erhålles:

$$\begin{aligned} v' &= Is' - As \\ v &= As' - Is \\ v &= I's - A's'' \\ v'' &= A's - I's'' \end{aligned}$$

s och v äro ström och spänning i den punkt, där ledarne stöta intill hvarandra.

Genom att eliminera v och s få vi:

$$v' = \left(I - \frac{A^2}{I + I'}\right) . s' - \frac{AA'}{I + I'} s''$$

$$v'' = \frac{AA'}{I + I'} . s' - \left(I' - \frac{A'^2}{I + I'}\right) s''$$

För den sålunda sammansatta ledningen kunna vi därför skrifva:

$$\begin{cases} v' = Is' - As'' \\ v'' = As' - Js'' \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Värdena på I, A och J erhållas ur nyss skrifna likheter.

En heterogen ledning kan alltid tänkas sammansatt af homogena delar. För en ledning hvilken som helst kunna vi därför skrifva:

$$v' = Is' - As''$$
$$v'' = As' - Js''$$

Motståndsoperatorn för en heterogen ledning skulle skrifvas:

$$\left.\begin{aligned} R &= I - \frac{A^2}{J} \quad (\text{från sidan } A) \\ K &= J - \frac{A^2}{I} \quad (\text{»} \quad \text{»} \quad B) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

För en ledning hvilken som helst gäller:

$$R \,.\, J = K \,.\, I.$$

I det följande beteckna vi konstanterna för halfva ledningen med index 1, för fjärdedelen med index 2 etc.

Genom att insätta i formeln för den sammansatta ledningen erhålles:

$$I = I_1 - \frac{A_1^{\,2}}{2\,I_1}$$

$$A = \frac{A_1^{\,2}}{2\,I_1}$$

således

$$I_1 = I + A \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

På liknande sätt få vi:

$$R_1 = I - A \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Om en homogen ledning är hopkopplad med en ledning utan kapacitet, få vi för den sammansatta ledningen:

$$\left.\begin{aligned} I'' &= I \\ A'' &= A \\ J'' &= I + \eta' \\ R'' &= \frac{I}{I+\eta'}\,(R+\eta') \\ K'' &= R + \eta' \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Om den homogena ledningen på hvar sin sida har ett motstånd utan kapacitet få vi:

$$\left.\begin{aligned} I'' &= I + \eta \\ A'' &= A \\ J'' &= I + \eta' \\ R'' &= \frac{I+\eta}{I+\eta'}\,(R+\eta') \\ K'' &= \frac{I+\eta'}{I+\eta}\,(R+\eta) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19^1)$$

TEORI FÖR INDUCERAD SPÄNNING OCH STRÖM.

Med förut angifna beteckningar hafva vi följande ekvationer för svagströmsledningen:

$$m_{01}\frac{ds_0}{dt}+r_1 s_1+l_1\frac{ds_1}{dt}=-\frac{dv_1}{dx}$$

$$\frac{dq_1}{dt}+a_1 v_1=-\frac{ds_1}{dx}$$

Sambandet mellan potentialen och laddningen pr längdenhet hos de båda ledningarne angifves genom ekvationerna:

$$\begin{aligned} v_1 &= q_0 k_{01}+q_1 k_1 \\ v_0 &= q_0 k_0 + q_1 k_{01} \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

eliminera vi q_0 mellan dessa:

$$v_1=\frac{k_{01}}{k_0}v_0+\frac{k_0 k_1-k_{01}^2}{k_0}q_1$$

eller om vi införa:

$$\varepsilon=\frac{k_{01}}{k_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

$$c_1=\frac{k_0}{k_0 k_1-k_{01}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

få vi:

$$v_1=\varepsilon v_0+\frac{q_1}{c_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

c_1 är här tydligen kapaciteten hos ledningen 1 när 0 har nollpotential. Vi införa detta värde på v_1 i våra ekvationer:

$$\left\{\begin{aligned} &-m_{01}\frac{ds_0}{dt}-\varepsilon\frac{dv_0}{dx}=r_1 s_1+l_1\frac{ds_1}{dt}+\frac{1}{c_1}\frac{dq_1}{dx} \\ &\frac{dq_1}{dt}+\frac{a_1}{c_1}q_1+\varepsilon a_1 v_0=-\frac{ds_1}{dx} \end{aligned}\right.$$

För högspänningsledningen kunna vi utan vidare, såsom vi senare skola se, antaga, att på grund af motståndets litenhet ingen vågbildning äger rum; då vidare afledningen är negligerbar kunna vi skrifva:

$$-\frac{dv_0}{dx}=r_0 s_0+l_0\frac{ds_0}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Vi kunna därför skrifva:

$$-m_{01}\frac{ds_0}{dt}-\varepsilon\frac{dv_0}{dx}=\varepsilon\left\{r_0+\left(l_0-\frac{m_{01}}{\varepsilon}\right)\right\}s_0 \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Vidare införa vi en ny obekant Q:

$$q_1=Q+q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

där Q är den enkelt harmoniska lösningen med det gifna periodtalet till ekvationen

$$\frac{dQ}{dt}+\frac{a_1}{c_1}Q=-\varepsilon a_1 v_0$$

Som v_0 är linjär i x, blir samma förhållandet med Q, hvarför $\frac{dQ}{dx}$ är konstant i afseende på x. Genom denna substitution få ekvationerna utseendet (vi införa $\frac{d}{dt}=i\omega$):

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{dv_0}{dx} \cdot \dfrac{a_1}{a_1 + i\omega c_1} - i\omega m_{01} s_0 - \varepsilon \dfrac{dv_0}{dx} = (r_1 + i\omega l_1) s_1 + \dfrac{1}{c_1} \dfrac{dq}{dx} \\ (a_1 + i\omega c_1) q = - c_1 \dfrac{ds_1}{dx} \\ Q = - \dfrac{\varepsilon a_1 c_1 v_0}{a_1 + i\omega c_1} \end{cases}$$

eller

$$\begin{cases} - i\omega m_{01} s_0 - \varepsilon \dfrac{i\omega c_1}{a_1 + i\omega c_1} \dfrac{dv_0}{dx} = (r_1 + i\omega l_1) s_1 + \dfrac{1}{c_1} \dfrac{dq}{dx} \\ (a_1 + i\omega c_1) q = - c_1 \dfrac{ds_1}{dx} \\ Q = - \dfrac{\varepsilon a_1 c_1 v_0}{a_1 + i\omega c_1} \end{cases}$$

Vi införa följande nya substitutioner:

$$\frac{i\omega c_1}{a_1 + i\omega c_1} v_0 = \bar{v}_0$$

och

$$s_1 = S + s$$

där S är den enkelt harmoniska lösningen till ekvationen:

$$- i\omega m_{01} s_0 - \varepsilon \frac{d\bar{v}_0}{dx} = (r_1 + i\omega l_1) S$$

alltså:

$$S = \frac{- i\omega m_{01} s_0 - \varepsilon \dfrac{d\bar{v}_0}{dx}}{r_1 + i\omega l_1}$$

Våra ekvationer få härigenom formen:

$$\begin{cases} 0 = (r_1 + i\omega l_1) s + \dfrac{1}{c_1} \dfrac{dq}{dx} \\ (a_1 + i\omega c_1) q = - c_1 \dfrac{ds}{dx} \end{cases}$$

Om vi eliminera q:

$$(r_1 + i\omega l_1)(a_1 + i\omega c_1) s = \frac{d^2 s}{dx^2}$$

s är sålunda lösningen till ekvationen för elektriska svängningar, hvilken vi förut bestämt.

Lösningen till våra ekvationer för induktionen erhålles ur följande system:

$$\begin{cases} s_1 = S + s \\ q_1 = Q + q \\ v_1 = \varepsilon v_0 + \dfrac{q_1}{c_1} = \varepsilon \bar{v}_0 + \dfrac{q}{c_1} = \varepsilon \bar{v}_0 + v \\ S = - \dfrac{i\omega m_{01} s_0 + \varepsilon \dfrac{d\bar{v}_0}{dx}}{r_1 + i\omega l_1} \\ Q = - \dfrac{\varepsilon a_1}{i\omega} \bar{v}_0 \\ \bar{v}_0 = \dfrac{i\omega c_1}{a_1 + i\omega c_1} v_0 \\ q = - \dfrac{c_1}{a_1 + i\omega c_1} \dfrac{ds_1}{dx} \end{cases} \qquad (27)$$

Vi öfvergå nu till följande hufvudproblem.

Svagströmsledningen CABD går ett stycke AB parallelt med kontaktledningen. Bestäm inducerad spänning och ström.

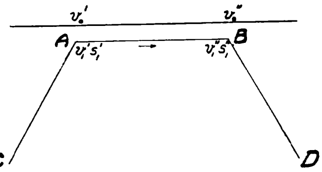

Bild 152.

Vi antaga att

$$\begin{aligned} v_1' &= -\eta' s_1' \\ v_1'' &= \eta'' s_1'' \end{aligned}$$

Om t. ex. svagströmsledningen vore isolerad i C skulle sålunda η' motsvara J för ledningen CA; om den däremot är jordad i C skulle η' vara samma som K för ledningen CA.

Enligt föregående hafva vi då följande ekvationssystem:

$$\left\{\begin{aligned} v' &= Is' - As'' \\ v'' &= As' - Is'' \\ s_1' &= S + s' \\ s_1'' &= S + s'' \\ v_1' &= \varepsilon\bar{v}_0' + v' \\ v_1'' &= \varepsilon\bar{v}_0'' + v'' \\ v_1' &= -\eta' s_1' \\ v_1'' &= \eta'' s_1'' \end{aligned}\right.$$

Genom eliminering af v', v'', s' och s'' erhålles

$$\begin{aligned} -\varepsilon\bar{v}_0' + (I-A)S &= (I+\eta')s_1' - As_1'' \\ -\varepsilon\bar{v}_0'' - (I-A)S &= As_1' - (I+\eta'')s_1'' \end{aligned}$$

men vi kunna skrifva (18):

$$\begin{aligned} I - A &= R_1 \\ I + A &= I_1 \end{aligned}$$

Om vi därför addera och subtrahera ekvationerna och införa beteckningarne:

$$\frac{\bar{v}_0' + \bar{v}_0''}{2} = \bar{v}_{0m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

och

$$2R_1 S - \varepsilon(\bar{v}_0' - \bar{v}_0'') = W \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

erhålles:

$$\begin{aligned} -2\varepsilon\bar{v}_{0m} &= (I_1 + \eta')s_1' - (I_1 + \eta'')s_1'' \\ W &= (R_1 + \eta')s_1' + (R_1 + \eta'')s_1'' \end{aligned}$$

v_{0m} är tydligen spänningen i den punkt af kontaktledningen, som svarar mot ledningsstycket AB:s midtpunkt.

Lösa vi ut $-s_1'$ och s_1'' ur dessa ekvationer, få vi:

$$-s_1' = \frac{(R_1 + \eta'')\,2\varepsilon\bar{v}_{0m} - (I_1 + \eta'')\,W}{(I_1 + \eta')(R_1 + \eta'') + (I_1 + \eta'')(R_1 + \eta')}$$

$$s_1'' = \frac{(R_1 + \eta')\,2\varepsilon\bar{v}_{0m} + (I_1 + \eta')\,W}{(I_1 + \eta')(R_1 + \eta'') + (I_1 + \eta'')(R_1 + \eta')}$$

Nämnaren kan emellertid skrifvas något enklare:

$$2I_1R_1 + (\eta' + \eta'')(R_1 + I_1) + 2\eta'\eta''$$

men

$$\begin{aligned} R_1 + I_1 &= 2I \\ R_1 I_1 &= RI \end{aligned}$$

alltså:

$$\text{nämnaren} = 2I\left(R + \eta' + \eta'' + \frac{\eta'\eta''}{I}\right)$$

Vi kunna därför skrifva:

I
$$\begin{cases} -s_1' = \dfrac{R_1 + \eta''}{R + \eta' + \eta'' + \dfrac{\eta'\eta''}{I}} \dfrac{\varepsilon \bar{v}_{0m}}{I} - \dfrac{I_1 + \eta''}{2I} \dfrac{W}{R + \eta' + \eta'' + \dfrac{\eta'\eta''}{I}} \\ s_1'' = \dfrac{R_1 + \eta'}{R + \eta' + \eta'' + \dfrac{\eta'\eta''}{I}} \dfrac{\varepsilon \bar{v}_{0m}}{I} + \dfrac{I_1 + \eta'}{2I} \dfrac{W}{R + \eta' + \eta'' + \dfrac{\eta'\eta''}{I}} \\ v_1' = -\eta' s_1' \\ v_1'' = \eta'' s_1'' \\ W = -R_1 \dfrac{i\omega m_{01} s + \varepsilon \dfrac{d\bar{v}_0}{dx}}{r_1 + i\omega l_1} - \varepsilon(\bar{v}_0' - \bar{v}_0'') \end{cases}$$

Innan vi öfvergå till tillämpningar af dessa formler, skola vi närmare genomgå de olika egenskaperna hos de storheter, som förekomma i formlerna.

ε

Först hafva vi då att bestämma huru ε beräknas. Enligt formel 21 ha vi

$$\varepsilon = \frac{k_{01}}{k_0}$$

Det enklaste förekommande fallet är följande:

Fall 1. Endast de två ledningarne, kontaktledningen och svagströmsledningen, äro för handen och jordytan kan antagas plan och ledande.

I så fall hafva vi följande enkla formler:

$$\left.\begin{aligned} k_{01} &= 18 \log \frac{t}{d} \cdot 10^6 \\ k_0 &= 18 \log \frac{2h}{\rho} \cdot 10^6 \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (30)$$

där d är afståndet mellan ledarne, t afståndet mellan den ena af ledarnes spegelbilder i afseende på jordytan och den andra ledningen, h kontaktledningens höjd öfver marken och ρ kontakttrådens radie.

Vi se, att ju större radien är desto större blir ε.

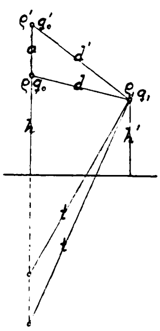

Bild 153.

Fall 2. Ett mer kompliceradt fall är, att *kontaktledningen uppbäres af en bärtråd,* som kan antagas ligga i samma vertikalplan som kontakttråden.

Med användande af de beteckningar som vidstående figur utvisar få vi följande relationer:

$$\begin{aligned} v_0 &= k_0 q_0 + k_{00} q_0' + k_{01} q_1 \\ v_0 &= k_{00} q_0 + k_0' q_0' + k_{01}' q_1 \\ v_1 &= k_{01} q_0 + k_{01}' q_0' + k_1 q_1 \end{aligned}$$

hvarest

$$\left\{\begin{aligned} k_0 &= 18 \log \frac{2h}{\rho} \,.\, 10^6 \\ k_0' &= 18 \log \frac{2(h+a)}{\rho'} \,.\, 10^6 \\ k_{01} &= 18 \log \frac{t}{d} \,.\, 10^6 \\ k_{01}' &= 18 \log \frac{t'}{d'} \,.\, 10^6 \\ k_1 &= 18 \log \frac{2h'}{\rho_1} \,.\, 10^6 \\ k_{00} &= 18 \log \frac{2h+a}{a} \,.\, 10^6 \end{aligned}\right. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

Genom att subtrahera de två första ekvationerna:

$$(k_0 - k_{00})q_0 = (k_0' - k_{00})q_0' + q_1(k_{01}' - k_{01})$$

Den sista af dessa termer kunna vi emellertid försumma, emedan båda faktorerna äro små, alltså:

$$\frac{q_0}{k_0' - k_{00}} = \frac{q_0'}{k_0 - k_{00}} = \frac{q_0 + q_0'}{k_0 + k_0' - 2k_{00}} = \frac{Q_0}{k_0 + k_0' - 2k_{00}}$$

om Q_0 får beteckna elektricitetsmängden pr km hos kontakt- och bärtråd tillsammans.

Om vi multiplicera de två första ekvationerna med respektive $k_0' - k_{00}$ och $k_0 - k_{00}$ samt addera dem och insätta värden på q_0 och q_0' i alla ekvationerna få vi:

$$v_0 = \frac{k_0 k_0' - k_{00}^2}{k_0 + k_0' - 2k_{00}} Q_0 + \frac{(k_0' - k_{00})\, k_{01} + (k_0 - k_{00})\, k_{01}'}{k_0' - k_{00} + k_0 - k_{00}} q_1$$

$$v_1 = \frac{(k_0' - k_{00})k_{01} + (k_0 - k_{00})k_{01}'}{k_0' - k_{00} + k_0 - k_{00}} Q_0 + k_1 q_1$$

Jämföra vi dessa ekvationer med ekv. (20), se vi att man kan betrakta kontaktledningen och bärtråden som en enda ledning, om man såsom potentialkoefficienter för denna inför:

$$\left\{\begin{aligned} K_0 &= \frac{k_0 k_0' - k_{00}^2}{k_0 + k_0' - 2\,k_{00}} \\ K_{01} &= \frac{k_{01}\,(k_0' - k_{00}) + k_{01}'\,(k_0 - k_{00})}{k_0' - k_{00} + k_0 - k_{00}} \\ K_1 &= k_1 \end{aligned}\right. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

Vi se här att K_{01} ligger mellan k_{01} och k_{01}'. I de flesta fall torde man därför kunna skrifva $K_{01} = \frac{k_{01} + k_{01}'}{2}$.

K_0 är inversa värdet af kapaciteten hos kontaktledning och bärtråd betraktade såsom en ledare. Genom bärtråden blir ε ökad, emedan K_0 blifvit minskad.

Som K_0 endast beror på kontakt- och bärtråds ömsesidiga afstånd, afstånd från jord samt trådarnes diameter, måste den ökning i ε, som bärtråden förorsakar, utgöra samma procent hvar helst än svagströmsledningen må befinna sig.

Vi öfvergå nu till ett annat fall:

Fall 3. Svagströmsledningen består af två parallella ledare med samma elektriska konstanter och samma diameter.

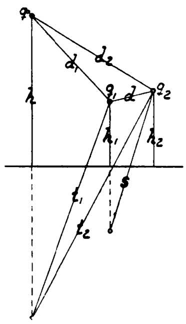

Bild 154.

$$v_0 = k_0\, q_0 + k_{01} q_1 + k_{02} q_2$$
$$v_1 = k_{01} q_0 + k_1\, q_1 + k_{12} q_2$$
$$v_2 = k_{02} q_0 + k_{12} q_1 + k_2\, q_2$$

$$k_1 = k_2$$

Genom addition af de två sista:

$$v_1 + v_2 = (k_{01} + k_{02}) q_0 + (q_1 + q_2) \cdot (k_1 + k_{12})$$

sätt:

$$\frac{v_1 + v_2}{2} = v;\ q_1 + q_2 = q$$

$$v = \frac{k_{01} + k_{02}}{2} q_0 + q \cdot \frac{k_1 + k_{12}}{2}$$

Genom jämförelse få vi sålunda:

$$\left\{\begin{aligned} K_0 &= k_0 \\ K_{01} &= \frac{k_{01} + k_{02}}{2} \\ K_1 &= \frac{k_1 + k_{12}}{2} \\ \varepsilon &= \frac{K_{01}}{K_0} \\ \frac{1}{c_1} &= K_1 - \frac{K_{01}^2}{K_0} = \frac{k_1 + k_{12}}{2} - \frac{(k_{01} + k_{02})^2}{4k_0} \end{aligned}\right. \qquad \ldots\ldots\ldots\ (33)$$

Fall 4. I närheten af svagströmsledningen befinner sig en ledare, som är jordförbunden.

Om svagströmsledningen består af endast en ledare eller en dubbelledning på något afstånd från den jordförbundna ledaren eller är skrufvad, hafva vi endast att sätta v_2 (potentialen hos den jordade ledaren) $= 0$ i formeln i förra fallet:

$$\left\{\begin{aligned} v_0 &= k_0\, q_0 + k_{01} q_1 + k_{02} q_2 \\ v_1 &= k_{01} q_0 + k_1\, q_1 + k_{12} q_2 \\ o &= k_{02} q_0 + k_{12} q_1 + k_2\, q_2 \end{aligned}\right.$$

Genom eliminering af q_2:

$$\left\{\begin{aligned} v_0 &= \left(k_0 - \frac{k_{02}^2}{k_2}\right) q_0 + \left(k_{01} - \frac{k_{02} k_{12}}{k_2}\right) q_1 \\ v_1 &= \left(k_{01} - \frac{k_{02} k_{12}}{k_2}\right) q_0 + \left(k_1 - \frac{k_{12}^2}{k_2}\right) q_1 \end{aligned}\right.$$

alltså:

$$\left\{\begin{aligned} K_0 &= k_0 - \frac{k_{02}^2}{k_2} \\ K_{01} &= k_{01} - \frac{k_{02} k_{12}}{k_2} \\ K_1 &= k_1 - \frac{k_{12}^2}{k_2} \end{aligned}\right. \qquad \ldots\ldots\ldots\ (34)$$

K_0 har något minskats; dock ej betydligt, såvida ej den jordade ledaren befinner sig mycket nära kontaktledningen. På samma sätt har K_1 minskats.

Vi se, att k_{02} och k_{12} hafva lika stort inflytande på minskningen i K_{01}. Men k_{02} beror på förhållandet mellan den jordade ledningens afstånd från kontaktledningen och dess spegelbild och k_{12} på förhållandet mellan den jordade ledningens afstånd från svagströmsledningen och dess spegelbild. Vi se sålunda att K_{01} blir lika, när den jordade ledaren ligger nära kontaktledningen eller nära svagströmsledningen.

I det följande skola vi se att induktionen beror på εc_1, alltså på

$$\frac{K_{01}}{K_0 K_1 - K_{01}{}^2}$$

Om kontakt- och svagströmsledning hafva samma värden på K, se vi att den jordade ledningen sänker spänningen lika mycket när den ligger nära kontaktledningen, som när den ligger nära svagströmsledningen.

m_{01}

Den ömsesidiga induktionskoefficienten är i hög grad beroende af den väg den högspända strömmen använder till återledning.

Om strömmen använder skenorna till återledning, kunna vi skrifva:

$$m_{01} = 2 \log \frac{t}{d} \,.\, 10^{-4} \text{ henry pr km,}$$

där d är afståndet mellan kontakttråd och svagströmsledning och t afståndet mellan skenorna och samma ledning.

Om återigen vi taga det ytterlighetsfall att återledningen sker genom ett ledande ytskikt af jorden, skulle vi få samma formel, men i detta fall betyder t afståndet mellan kontaktledningens spegelbild och svagströmsledningen.

Om svagströmsledningen består af tvenne ledare, få vi andra värden på m_{01}. Om vi skrifva våra ursprungliga ekvationer för spänningsfallet i svagströmsledningens två branscher, få vi:

$$m_{01}\frac{ds_0}{dt} + r_1 s_1 + l_1 \frac{ds_1}{dt} + m_{12}\frac{ds_2}{dt} = -\frac{dv_1}{dx}$$

$$m_{02}\frac{ds_0}{dt} + r_1 s_2 + l_1 \frac{ds_2}{dt} + m_{12}\frac{ds_1}{dt} = -\frac{dv_2}{dx}$$

Genom addition:

$$(m_{01} + m_{02})\frac{ds_0}{dt} + r_1(s_1 + s_2) + (l_1 + m_{12}) \,.\, \frac{d}{dt}(s_1 + s_2) = -\frac{d}{dx}(v_1 + v_2)$$

Om vi här införa:

$$s_1 + s_2 = s$$

$$\frac{v_1 + v_2}{2} = v$$

erhålles

$$\frac{m_{01} + m_{02}}{2}\frac{ds_0}{dt} + \frac{r_1}{2} s + \frac{l_1 + m_{12}}{2}\frac{ds}{dt} = -\frac{dv}{dx}$$

Vi se alltså att dubbelledningen kan betraktas som en enda ledning med följande konstanter:

$$
\begin{array}{ll}
\text{ömsesid. induktionskoeff.} & = \frac{1}{2}(m_{01} + m_{02}) \\
\text{motstånd} & = \frac{r_1}{2} \\
\text{självinduktionskoeff.} & = \frac{l_1 + m_{12}}{2} \\
\text{läckningskoeff.} & = 2a_1
\end{array}
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots (35)
$$

Den sista erhålles genom att behandla den andra af våra ursprungliga formler på samma sätt.

Hvad beträffar l_0 blir den olika för det fall strömmen till återledning använder skenorna eller går andra vägar tillbaka till generatorn. I förra fallet få vi:

$$l_0 = \left(\frac{1}{2} + 2 \log \frac{h}{\rho_0}\right) . 10^{-4}$$

Om återigen strömmen går tillbaka genom ett ytskikt, få vi i formeln insätta $2h$ i stället för h.

$\varepsilon \bar{v}_{cm}$

I det följande skola vi kalla $\varepsilon \bar{v}_{0m}$ för den i *svagströmsledningen* inducerade statiska spänningen. Om vi däremot tala om den statiska spänning som induceras i en viss punkt af ledningen mena vi härmed $\varepsilon \bar{v}_0$, om v_0 är spänningen i den punkt af kontaktledningen som ligger midt emot punkten på svagströmsledningen.

För $\bar{v}_0$ hade vi följande uttryck:

$$\bar{v}_0 = \frac{v_0}{1 + \frac{a_1}{i\omega c_1}}$$

Läckningen hos svagströmsledningen har det inflytandet, att inducerade strömmar och spänningar i denna ledning bli exakt desamma som om ingen läckning funnes och i stället spänningen i kontaktledningen vore sänkt i proportionen $1 : \left(1 + \frac{a_1}{i\omega c_1}\right)$ eller $1 : \sqrt{1 + \frac{a_1^2}{\omega^2 c_1^2}}$. Detta framgår af formelsystemet I.

Läckningens inflytande framgår enklast genom exempel. Vi antaga svagströmsledningen hafva sådan kapacitet att $\omega c_1 = 1{,}56 . 10^{-6}$ (26 perioder). Om svagströmsledningens isolation pr km är mer än 5 megohm, blir $a_1 < 0{,}2 . 10^{-6}$. En beräkning visar då att sänkningen i spänning icke uppgår till en procent. Om däremot isolationsmotståndet skulle vara mindre än 1 megohm, blir spänningssänkningen betydlig. Vore isolationsmotståndet 500,000 ohm, skulle induktionen i svagströmsledningen bli densamma som, om isolationen vore fullgod, men kontaktledningens spänning minskats till 61 % af den verkliga.

I förbigående bör nämnas att med viss konstant spänning vid matningspunkten blir v_{0m} beroende på strömstyrkan i kontaktledningen och på ledningens längd.

$2 R_1 S$

$2R_1S$ är en del af spänningen, som innehålles i W (29). Vi hafva följande uttryck:

$$R_1 = (r_1 + i\omega l_1)\frac{x}{2} . u\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$S = -\frac{i\omega m_{01} s_0 + \varepsilon \frac{d\bar{v}_0}{dx}}{r_1 + i\omega l_1}$$

Således:

$$2R_1S = -\left(i\omega m_{01}s_0 + \varepsilon\frac{d\bar{v}_0}{dx}\right).x.u\left(\frac{x}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

Spänningen $2R_1S$ är alltså sammansatt af den elektromagnetiska induktionsspänningen och en spänning beroende af spänningsfallet. För korta ledningar (se 13) bli båda dessa proportionella mot ledningens längd. När däremot x blir mycket stor, närmar sig $2R_1S$ till följande värde:

$$\lim\ (2R_1S) = -2\frac{i\omega m_{01}s_0 + \varepsilon\frac{d\bar{v}_0}{dx}}{b} \ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

Om isolationsmotståndet är tillräckligt stort, kan man utbyta $\bar{v}_0$ mot v_0, men

$$v_0' - v_0'' = (r_0 + i\omega l_0)xs_0$$

alltså:

$$2R_1S = -\left[i\omega m_{01} - \varepsilon\left(r_0 + i\omega l_0\right)\right]s_0x.u\left(\frac{x}{2}\right) =$$

$$= -\varepsilon\left[r_0 + i\omega\left(l_0 - \frac{m_{01}}{\varepsilon}\right)\right]s_0x.u\left(\frac{x}{2}\right)$$

Om nu återledningen sker genom jorden så är

$$l_0 - \frac{m_{01}}{\varepsilon} = \frac{1}{2}.10^{-4}$$

alltså:

$$2R_1S = -\varepsilon\left[r_0 + \frac{i\omega}{2}.10^{-4}\right]s_0x.u\left(\frac{x}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

Vi se häraf, att den elektromagnetiska delen af inducerade spänningen är mindre än komponenten i samma riktning af den del i $2R_1S$, som härrör från spänningsfallet.

$2R_1S$ är proportionell mot ε och i öfrigt oberoende af afståndet mellan ledningarne. Samma är förhållandet med den statiska induktionen.

Under förutsättning att isolationen hos svagströmsledningen är god, ligger $2R_1S$ approximativt i motsatt fas mot s_0.

$2R_1S$ är för korta ledningar oberoende af svagströmsledningens beskaffenhet.

W

De inducerade spänningar, som förekomma i vårt formelsystem I, voro $\varepsilon\bar{v}_{0m}$ och W. Den senare dela vi i två delar, den första som vi beteckna med W' bestående af den del som härrör från elektromagnetisk induktion, och den andra W'' härrörande från spänningsfallet.

Nu var:

$$W = 2R_1S - \varepsilon(\bar{v}_0' - \bar{v}_0'')$$

alltså:

$$W = -i\omega m_{01}s_0.x.u\left(\frac{x}{2}\right) + \varepsilon(\bar{v}_0' - \bar{v}_0'').u\left(\frac{x}{2}\right) - \varepsilon(\bar{v}_0' - \bar{v}_0'')$$

Således

$$W' = -i\omega m_{01}s_0x.u\left(\frac{x}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (39)$$

$$W'' = -\varepsilon(\bar{v}_0' - \bar{v}_0'')\left(1 - u\left(\frac{x}{2}\right)\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

Utveckla vi $1 - u\left(\frac{x}{2}\right)$ i potensserie, få vi:

$$1 - u\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{b^2x^2}{12} \cdot \frac{1 + \frac{1}{10}\frac{b^2x^2}{4} + \ldots}{1 + \frac{1}{2}\frac{b^2x^2}{4} + \ldots} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

Vi skrifva

$$1 - u(x) = \frac{b^2x^2}{3} \cdot p(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (41^1)$$

Således:

$$W'' = -\varepsilon(\bar{v}_0' - \bar{v}_0'')\frac{b^2x^2}{12} \cdot p\left(\frac{x}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (40^1)$$

För korta ledningar se vi, att W' är proportionell mot ledningens längd. För mycket långa närmar sig W' till:

$$\lim W' = -2\frac{i\omega m_{01} s_0}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (42)$$

Hvad W'' beträffar, är den för korta ledningar proportionell mot kuben på ledningens längd.

För mycket långa ledningar närmar sig W'' till

$$\lim W'' = -\varepsilon(\bar{v}_0' - \bar{v}_0'') - \varepsilon\frac{d\bar{v}_0}{dx} \cdot \frac{2}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (43)$$

Vi skola nu omforma ekvationssystem I genom att för I, W, W' och W'' införa deras värden ur formlerna.

Den statiska delen af induktionsströmmen s_1' blir då:

$$-\frac{R_1 + \eta''}{R + \eta' + \eta'' + \frac{\eta'\eta''}{I}} i\omega c_1 \cdot \varepsilon v_{0m} \cdot x \cdot u(x)$$

Den elektromagnetiska induktionsströmmen:

$$-\frac{I_1 + \eta''}{2I} \frac{i\omega m_{01} s_0 x \cdot u\left(\frac{x}{2}\right)}{R + \eta' + \eta'' + \frac{\eta'\eta''}{I}}$$

men

$$2I = I_1 \cdot \frac{u\left(\frac{x}{2}\right)}{u(x)}$$

alltså kunna vi skrifva den elektromagnetiska delen af induktionen:

$$-\left(1 + \frac{\eta''}{I_1}\right) \frac{i\omega m_{01} s_0 x \cdot u(x)}{R + \eta' + \eta'' + \frac{\eta'\eta''}{I}}$$

Den del af induktionsströmmen, som härrör från spänningsfallet:

$$+\frac{I_1 + \eta''}{2I} \frac{\varepsilon\frac{d\bar{v}_0}{dx}\frac{b^2x^3}{12} \cdot p\left(\frac{x}{2}\right)}{R + \eta' + \eta'' + \frac{\eta'\eta''}{I}} = \left(1 + \frac{\eta''}{I_1}\right) \cdot \frac{u(x) \cdot (r_1 + i\omega l_1) \cdot \varepsilon\frac{d\bar{v}_0}{dx} i\omega c_1 \frac{x^3}{12} \cdot p\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(R + \eta' + \eta'' + \frac{\eta'\eta''}{I}\right) \cdot u\left(\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \left(1+\frac{\eta''}{I_1}\right)\cdot\frac{R}{R+\eta'+\eta''+\frac{\eta'\eta''}{I}}\,.\,i\omega c_1\,.\,\varepsilon\frac{d\bar{v}_0}{dx}\frac{x^2}{12}\frac{p\left(\frac{x}{2}\right)}{u\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Vi införa följande förkortningar:

$$\begin{aligned}\bar{R} &= R+\eta'+\eta''+\frac{\eta'\eta''}{I}\\ q_m &= \varepsilon v_{0m}c_1 x\\ q_s &= \varepsilon\frac{v_0'-v_0''}{2}c_1\frac{x}{2}\\ e &= m_{01}s_0 x\end{aligned}$$

För en kort ledning öfvergår $\bar{R}$ i motståndet för ledningskretsen.

q_m är den totala laddning som ledningen skulle erhålla, om högspänningsledningen hade spänningen v_{0m} utefter hela sin längd och svagströmsledningen vore jordförbunden.

q_s är den laddning som svagströmsledningens ena hälft skulle erhålla, om spänningen i den punkt af högspänningsledningen, som svarar mot midtpunkten på svagströmsledningen, vore noll och spänningsdifferensen mellan ändpunkterna vore $v_0'-v_0''$.

$-i\omega e$ är den totala inducerade elektromagnetiska spänningen.

De inducerade strömmarne i ändpunkten 1 af svagströmsledningen få då följande utseende:

II

Den statiska induktionsströmmen:	$-\frac{R_1+\eta''}{\bar{R}}\,.\,i\omega q_m\,.\,u(x)$
» elektromagn. »	$-\left(1+\frac{\eta''}{I_1}\right)\cdot\frac{i\omega e}{\bar{R}}\,.\,u(x)$
Den del som svarar mot spänningsfallet:	$-\left(1+\frac{\eta''}{I_1}\right)\cdot\frac{R}{\bar{R}}\,i\omega\frac{1}{3}\,q_s\frac{p\left(\frac{x}{2}\right)}{u\left(\frac{x}{2}\right)}$

Den statiska laddningsströmmen är sålunda densamma, som om hela den statiska laddningen vore koncentrerad i ledningens midtpunkt.

För korta ledningar kunna vi skrifva

$$u(x)=u\left(\frac{x}{2}\right)=p\left(\frac{x}{2}\right)=1$$

$$\frac{\eta''}{I_1}=0;\quad \bar{R}=R+\eta'+\eta''=2R_1+\eta'+\eta''$$

alltså:

III

Den statiska induktionsströmmen:	$-\frac{R_1+\eta''}{\bar{R}}\,i\omega q_m$
Den elektromagn. »	$-\frac{i\omega e}{\bar{R}}$
Spänningsfallets induktionsström:	$-i\omega\frac{R}{\bar{R}}\frac{1}{3}q_s$

Anm. Af den sista formeln framgår, att om svagströmsledningen är jordad komma $\frac{2}{3}$ af de laddningar som hopa sig vid ändpunkterna på grund af spänningsfallet i högspänningsledningen att neutraliseras i ledningen, $\frac{1}{3}$ går till jord.

För mycket långa ledningar få vi sätta:

$$R_1 = R = I = I_1\,;\; x\,.\,u(x) = \frac{1}{b};\; \frac{b^2x^2}{12}\,p\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - u\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\text{IV}\left\{\begin{array}{ll} \text{Den statiska induktionsströmmen:} & -\dfrac{R}{R+\eta'}\cdot\dfrac{i\omega c_1\,.\,\varepsilon v_{0m}}{b} \\[2ex] \text{Den elektromagn. induktionsströmmen:} & -\dfrac{R}{R+\eta'}\cdot\dfrac{i\omega m_{01}s_0}{r_1+i\omega l_1} \\[2ex] \begin{array}{l}\text{Induktionsströmmen på grund af spän-}\\ \text{ningsfallet:}\end{array} & -\dfrac{R}{R+\eta'}\cdot\dfrac{i\omega\varepsilon}{b}\left[\dfrac{1}{2}(v_0'-v_0'')-\dfrac{1}{b}\dfrac{dv_0}{dx}\right] \end{array}\right.$$

Oändligt långa ledningar förhålla sig alltså på samma sätt som om de vore korta och af längden $\frac{1}{b}$.

TILLÄMPNINGAR.

PROBLEM 1.

Bestäm spänningen i en med kontaktledningen parallell, isolerad svagströmsledning.

Vi antaga till en början, att *svagströmsledningen utefter hela sin längd följer kontaktledningen.*

För att erhålla de formler som utgöra lösning på detta problem, hafva vi att i grundformlerna I sätta $\eta' = \eta'' = \infty$ samt göra en gränsöfvergång.

Vi erhålla:

$$v_1' = \varepsilon\bar{v}_{0m} - \frac{W}{2}$$

$$v_1'' = \varepsilon\bar{v}_{0m} + \frac{W}{2}$$

Om man i stället för v_{0m}, som är spänningen i den punkt af kontaktledningen, som ligger midt emot svagströmsledningens midtpunkt, vill införa spänningarne i de punkter, som svara mot svagströmsledningens ändpunkter, erhålles:

$$v_1' = \varepsilon\bar{v}_0' - R_1S$$
$$v_1'' = \varepsilon\bar{v}_0'' + R_1S$$

Enligt hvad vi förut påpekat, är den elektromagnetiska delen af R_1S mindre än ena fasen af induktionen beroende på spänningsfallet i ledningen. Häraf kunna vi sluta, att om spänningsfallet i kontaktledningen är litet i förhållande till hela spänningen, måste detta i än högre grad vara fallet med den elektromagnetiska induktionen. Så länge därför spänningsfallet i kontaktledningen är litet i förhållande till den totala spänningen, är den inducerade *spänningen* hufvudsakligen beroende på *statisk induktion.*

I praktiken blir detta i än högre grad fallet, emedan i kontaktledningen strömmarne komma att gå åt motsatt håll i olika delar af densamma, hvarigenom en del af den elektromagnetiska induktionen upphäfves.

Den statiska delen af inducerade spänningen kan skrifvas:

$$\varepsilon \frac{v_0}{1 + \frac{a_1}{i\omega c_1}}.$$

Hvad först ε beträffar, hafva vi förut sett, att den beror på ledningarnes läge i förhållande till hvarandra och jorden samt på kontaktledningens kapacitet. Ju större kapacitet desto större ε. Vid användande af bärtråd blir sålunda ε större, hvilket äfven framgår af förut beräknade formler. Vidare inverka i närheten befintliga ledare, som äro jordförbundna, så att ε minskas. På samma sätt torde äfven träd och i närheten af ledningarne befintliga föremål, som äro mer eller mindre ledande, inverka. Man bör därför vänta sig att utförda mätningar gifva mindre värden än de beräknade.

Den inducerade statiska spänningen är vidare beroende på förhållandet $\frac{a_1}{\omega c_1}$. Är blott isolationen hos svagströmsledningen tillnärmelsevis god, kan $\frac{a_1}{\omega c_1}$ försummas, och i så fall kan man skrifva statiska spänningen $= \varepsilon v_0$.

Detta synes bäst af ett exempel. Om svagströmsledningen består af en 3 mm dubbelledning af järn eller koppar på 5,5 meters höjd öfver marken, få vi med användande af formel (22) $\omega c_1 = 1{,}56 \,.\, 10^{-6}$.

Om isolationsmotståndet är mer än 5 megohm, blir $a_1 < 0{,}2 \,.\, 10^{-6}$, alltså $\frac{a_1}{\omega c_1} < 0{,}125$. Som $\frac{a_1}{i\omega c_1}$ är i 90° fas med 1, betyder $\frac{a_1}{\omega c_1}$ ingenting för *storleken* af den inducerade spänningen. På den inducerade spänningens *fas* har den dock inflytande.

Den inducerade statiska spänningen är sålunda beroende af ω, endast om isolationen är dålig. I så fall se vi att ju större ω desto högre spänning. Den statiska spänningen är oberoende af ledningens längd. Härvid är dock att komma ihåg, att vi med statisk spänning mena den, som svarar mot v_{0m}. I det följande kalla vi alltid den del af induktionen, som svarar mot spänningen i midtpunkten för statisk induktion; den som svarar mot den elektromagnetiska delen i $\frac{W}{2}$ för den elektromagnetiska induktionen, och slutligen den del af $\frac{W}{2}$ som beror på $v_0' - v_0''$ för induktion till följd af spänningsfallet.

För spänningen i ledningens ändpunkter få vi därför:

Den statiska delen $\quad \varepsilon \frac{v_{0m}}{1 + \frac{a_1}{i\omega c_1}} = \varepsilon \bar{v}_{0m}$

Den elektromagnet. delen $\mp \frac{1}{2} i\omega m_{01} s_0 x \,.\, u\left(\frac{x}{2}\right)$

Spänningsfallets induktion $\mp \varepsilon(\bar{v}_0' - \bar{v}_0'') \,.\, \frac{b^2 x^2}{24} \,.\, p\left(\frac{x}{2}\right)$

För korta ledningar blir den elektromagnetiskt inducerade spänningen proportionel mot ledningens längd. Den spänning, som induceras på grund af spänningsfallet, är däremot proportionel mot kuben på ledningens längd.

För mycket långa ledningar närmar sig den elektromagnetiska spänningen till värdet

$$\mp\, i\omega m_{01} s_0 \frac{1}{b}$$

och den på grund af spänningsfallet:

$$\mp \left[\frac{1}{2}\varepsilon(\bar{v}_0' - \bar{v}_0'') + \varepsilon \frac{d\bar{v}_0}{dx}\frac{1}{b}\right]$$

För mycket långa ledningar kunna vi därför skrifva:

$$\lim v_1' = \varepsilon \bar{v}_0' + i\omega m_{01} s_0 \frac{1}{b} + \varepsilon \frac{d\bar{v}_0}{dx}\frac{1}{b}$$

$$\lim v_1'' = \varepsilon \bar{v}_0'' - i\omega m_{01} s_0 \frac{1}{b} - \varepsilon \frac{d\bar{v}_0}{dx}\frac{1}{b}$$

I ledningens midtpunkt blir spänningen alltid $v_{1m} = \varepsilon \bar{v}_{0m}$.

Spänningarne närma sig sålunda till värden svarande mot en ledningslängd $= \frac{1}{b}$

För att få en jämförelse mellan de olika induktionernas storlek, skola vi beräkna ett exempel.

En 3 mm telefonledning af järn på 5,5 meters höjd öfver marken med ett afstånd af 0,5 meter mellan branscherna är 50 km lång och går hela vägen parallelt med en kontaktledning bestående af 8 mm koppartråd och på 5,7 meters höjd öfver marken. Afståndet mellan ledningarne = 2,5 meter. Spänningen i kontaktledningens punkt vid svagströmsledningens midtpunkt 15,000 volt och strömstyrkan 100 ampère. Isolationen hos svagströmsledningen antages vara god.

I det följande beteckna vi den elektromagnetiska delen af spänningen W med W' och den statiska delen (beroende på spänningsfallet) med W''. Såsom nollfas välja vi s_0:s fas och beteckna den vinkel en viss storhet befinner sig före densamma på så sätt, att vi skrifva fasvinkeln inom parentes. Vidare skola vi alltid, då intet annat säges, antaga att återledningen för båda ledningarne sker genom jorden.

Med de formler, som förut uppställts, få vi:

$$\varepsilon = 0{,}194$$

$$\omega m_{01} = 5{,}85 \,.\, 10^{-2}$$

$$r_0 = 0{,}34$$

$$\omega l_0 = 0{,}27$$

$$\frac{dv_0}{dx} = 43{,}5\ (38^\circ\ 40')$$

$$u\left(\frac{x}{2}\right) = 1$$

$$p\left(\frac{x}{2}\right) = 1$$

$$\frac{b^2 x^2}{24} = 1{,}23 \,.\, 10^{-3}$$

Den stat. ind. spänningen $= 2910$ (w) volt
» elektromagn. » $= 146\,(-90^\circ)$ »
Spänningsfallets ind. sp. $= 0{,}4$ »

Vi se af detta exempel, att på så korta ledningar kan den inducerade elektromotoriska kraften på grund af spänningsfallet helt försummas och vidare att den elektromagnetiskt inducerade spänningen endast är $\frac{1}{20}$ af den statiska.

När x blir större och större närmar sig den elektromagnetiska spänningen värdet

$$W'_\infty = -\,i\omega m_{01} s_0 \frac{1}{b}$$

men

$$b = 3{,}44 \,.\, 10^{-3}\,(60^\circ 55')$$

$$\frac{1}{b} = 291 \text{ km}\,(-60^\circ 55')$$

$$W'_\infty = 1700 \text{ volt}\,(-150^\circ 55').$$

För mycket korta ledningar behöfver man tydligen endast taga hänsyn till den statiska spänningen.

För mycket långa ledningar är däremot detta icke förhållandet.

Om återledningen för kontaktledningen sker genom skenorna blir den elektromagnetiska induktionen mindre, emedan m_{01} blir mindre.

I praktiken synes återledningen ske delvis genom jorden och delvis genom skenorna, hvarför den elektromagnetiska induktionen kommer att ligga mellan de värden, som erhållas vid ytterlighetsfallen.

Vi öfvergå nu till det fall att *svagströmsledningen endast till en del af sin längd följer kontaktledningen.*

För att erhålla mer öfverskådliga formler antaga vi dessutom, att det är ena ändan af svagströmsledningen, som är utsatt för induktion.

Vi ha då att i formelsystem I insätta $\eta' = \infty$ och $\eta'' = I'$, där I' är isolationsoperatorn för den del af ledningen, som icke är utsatt för induktion. Dessutom införa vi spänningen i svagströmsledningens bortre isolerade ända och kalla den v_1'''. Vi erhålla då följande formler:

$$v_1' = \frac{I'}{I+I'}\left(\varepsilon\bar{v}_{0m} - \frac{W}{2}\right) + \frac{R_1}{I+I'}\,\varepsilon\bar{v}_{0m} - \frac{I_1}{I+I'}\,\frac{W}{2}$$

$$v_1'' = \frac{I'}{I+I'}\left(\varepsilon\bar{v}_{0m} + \frac{W}{2}\right)$$

$$v_1''' = \frac{A'}{I+I'}\left(\varepsilon\bar{v}_{0m} + \frac{W}{2}\right)$$

Spänningen v_1'' har sålunda minskats i proportionen $\frac{I'}{I+I'}$. För korta ledningar sålunda i proportion till ledningslängdens ökning.

För korta ledningar är v_1''' ej stort mindre än v_1'' emedan $A' = I'$, men äfven om ledningen är mycket lång, blir ej v_1''' afsevärdt mindre än v_1''. När svagströmsledningen består af en 3 mm dubbeltelefonledning, som fortsätter 500 km. blir förhållandet $\frac{A'}{I'} = \frac{1260}{1297}$.

Spänningen v_1' har först minskats i proportionen $\frac{I'}{I+I'}$, men sedan hafva tvenne spänningar, en statisk och en »W»-spänning tillkommit. Vi skrifva v_1' på följande sätt:

$$v_1' = \frac{I' + R_1}{I' + I}\,\varepsilon \bar{v}_{0m} - \frac{I' + I_1}{I' + I} \cdot \frac{W}{2}$$

I den första termen kan R_1 för korta ledningar försummas i förhållande till I', dels på grund af deras inbördes storlek och dels på grund däraf, att de ligga nära nog i 90° fas till hvarandra. Den andra delen af spänningen $\left(\frac{W}{2}\right)$ har ökats. Som för korta ledningar I_1 är dubbelt så stor som I, synes, att ökningen kan vara ganska anmärkningsvärd. Om den del af ledningen, som är utsatt för induktion är kort, den andra delen däremot mycket lång, kan denna spänning ökas till W d. v. s. till dubbla värdet. Är däremot förhållandet omvändt i afseende på ledningarnes längder kommer den inducerade spänningen att något öfverstiga $\frac{W}{2}$.

För att närmare klargöra det ofvan sagda öfvergå vi till ett exempel.

Vi antaga telefonledningen vara en 3 mm dubbelledning af koppar, som på 2,5 meters afstånd följer högspänningsledningen 200 km, och därefter fortsätter ytterligare 500 km.

Vi erhålla

$$\begin{aligned}
I' &= 360 - i\,.\,1246 = 1300\,(-73°\,50')\\
I &= 480 - i\,.\,3113 = 3150\,(-81°\,15')\\
I_1 &= 804 - i\,.\,6250 = 6300\,(-82°\,40')\\
R_1 &= 120 + i\,.\quad 20 = \;\;122\,(\quad 9°\,10')\\
A' &= \qquad\qquad\qquad\; 1260
\end{aligned}$$

$$\frac{R_1 + I'}{I + I'} = 0{,}298\,(10°\,30')$$

$$\frac{I'}{I + I'} = 0{,}292\,(\;5°\,13')$$

$$\frac{A'}{I + I'} = 0{,}284$$

$$\frac{I_1 + I'}{I + I'} = 1{,}62\,(7°\,55')$$

Vi se sålunda, att den statiska spänningen i rundt tal har sjunkit till 0,3 af den statiska spänning, som skulle ägt rum, om telefonledningen endast varit 200 km lång. Den elektromagnetiskt inducerade spänningen har hos v_1'' och v_1''' sjunkit i samma proportion. Hos v_1' har däremot W-spänningen ökats i proportionen 1,62.

Om vi proportionera i förhållande till längderna, skulle vi få den statiska spänningen sänkt i proportionen $\frac{200}{200+500} = 0{,}286$. Vi se, att detta värde rätt väl stämmer med det, som den fullständiga teorien lämnar.

Proportionera vi för den elektromagnetiska delen af spänningen hos v_1' skulle vi få:

$$\frac{I_1 + I'}{I + I'} = \frac{\frac{1}{100} + \frac{1}{500}}{\frac{1}{200} + \frac{1}{500}} = 1{,}72$$

Såsom approximation kan man därför i de flesta fall beräkna $\frac{I'}{I+I'}$ och $\frac{I_1+I'}{I+I'}$ genom att antaga I omvändt proportionel mot ledningens längd.

Om de två delarne af svagströmsledningen äro af olika beskaffenhet kunna vi använda följande approximation för bestämmande af I:

$$I = \frac{1}{(a_1 + i\omega c_1)x}$$

PROBLEM 2.

Bestäm induktionen i en med kontaktledningen parallell omnibuslinje för telegrafering.

Vi antaga, att stationerna följa så tätt på hvarandra, att telegrafledningen kan anses homogen för den inducerade växelströmmen. Vidare förutsätta vi att telegrafledningen utefter hela sin längd går parallellt med högspänningsledningen. Vi ha då att i formelsystem II insätta $\eta' = \eta'' = 0$. Med iakttagande af tecknen få vi då:

$$-s_1' = \frac{R_1}{R} i\omega q_m u(x) + \frac{i\omega e}{R} u(x) - \frac{1}{3} i\omega q_s \frac{p\left(\frac{x}{2}\right)}{u\left(\frac{x}{2}\right)}$$

men

$$\frac{R_1}{R} = \frac{1}{2} \frac{u\left(\frac{x}{2}\right)}{u(x)}$$

och

$$R = (r_1 + i\omega l_1) \,.\, u(x) \,.\, x$$

alltså:

$$-s_1' = i\omega \left\{ \frac{1}{2} q_m u\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{m_{01} s_0}{r_1 + i\omega l_1} - \frac{1}{3} q_s \frac{p\left(\frac{x}{2}\right)}{u\left(\frac{x}{2}\right)} \right\}$$

$$s_1'' = i\omega \left\{ \frac{1}{2} q_m u\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{m_{01} s_0}{r_1 + i\omega l_1} + \frac{1}{3} q_s \frac{p\left(\frac{x}{2}\right)}{u\left(\frac{x}{2}\right)} \right\}$$

Här betyder q_m den laddning, som ledningen skulle upptaga för att utefter hela sin längd få spänningen εv_{0m}; q_s den ökning i laddning, som ena hälften af ledningen får, när spänningen är variabel $= \varepsilon v_0$ i stället för εv_{0m}. q_m är proportionell mot ledningens längd; däremot är q_s proportionell mot kvadraten på ledningens längd, emedan den är proportionell mot både spänningsfallet och ledningslängden.

Genom addition och subtraktion erhålles:

$$-s_1' + s_1'' = i\omega q_m \,.\, u\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$s_1' + s_1'' = -2 i\omega \left(\frac{m_{01} s_0}{r_1 + i\omega l_1} - \frac{1}{3} q_s \frac{p\left(\frac{x}{2}\right)}{u\left(\frac{x}{2}\right)} \right)$$

Totala strömmen till linjen är sålunda endast beroende på den i svagströmsledningens midtpunkt inducerade statiska spänningen. Å andra sidan är summan af strömmarne vid ändpunkterna räknade positiva i en viss led oberoende af den inducerade statiska spänningen.

Af våra formler framgår, att på korta ledningar är den statiskt inducerade strömmen proportionell mot ledningens längd. Den elektromagnetiska delen är under alla förhållanden, d. v. s. vare sig ledningen är kort eller lång, oberoende af ledningens längd. De strömmar, som induceras på grund af spänningsfallet, äro för korta ledningar proportionella mot kvadraten på ledningens längd.

För mycket korta ledningar har därför den elektromagnetiska induktionen öfverhanden, i synnerhet om ledningens impedans är liten, men ju längre ledningen är, desto mer blir det den statiska induktionen, som får största betydelsen. Anmärkningsvärdt är att de inducerade strömmarne, om man frånser korrektionstermerna $u\left(\frac{x}{2}\right)$ och $p\left(\frac{x}{2}\right)$ äro oberoende af läckningen. Vidare framgår af formlerna, att såväl den statiskt inducerade strömmen som strömmen på grund af spänningsfallet med samma approximation äro oberoende af ledningens impedans.

Om afståndet mellan ledningarne ökas, ändras alla tre induktionerna i samma proportion under förutsättning, att återledningen för högspända strömmen sker genom jordytan, emedan då ε och m_{01} ändras i samma proportion. Om däremot återledningen helt eller delvis sker genom skenorna, aftager den elektromagnetiska induktionsströmmen fortare än de öfriga. Om ledningens längd ökas, närma sig induktionsströmmarne till följande gränsvärden:

$$-s_1' = i\omega \left\{ \frac{q'}{b} + \frac{m_{01}s_0}{r_1 + i\omega l_1} + \frac{\varepsilon c_1 \frac{dv_0}{dx}}{b^2} \right\}$$

$$s_1'' = i\omega \left\{ \frac{q''}{b} - \frac{m_{01}s_0}{r_1 + i\omega l_1} - \frac{\varepsilon c_1 \frac{dv_0}{dx}}{b^2} \right\},$$

där

$$q' = \varepsilon v_0' c_1$$

$$q'' = \varepsilon v_0'' c_1$$

$$b = \sqrt{(r_1 + i\omega l_1)(a_1 + i\omega c_1)}$$

Totala induktionen närmar sig alltså ett fixt värde. Den statiska induktionsströmmens gränsvärde är omvändt proportionellt mot kvadratroten ur impedansen; den elektromagnetiska däremot omvändt mot impedansen. Den statiska är därför mindre beroende af en ökning i impedans, än hvad fallet är med de öfriga induktionsströmmarne.

I det föregående hafva vi bestämt de inducerade strömmarne vid telegrafledningens båda ändpunkter. Telegrafapparaterna äro emellertid distribuerade utefter hela ledningen. Det är därför af intresse att äfven känna den ström, som induceras i andra delar af ledningen och dessutom den spänning, som där erhålles. För symmetriens skull välja vi telegrafledningens midtpunkt. Tillämpa vi de allmänna linjära ekvationerna för ström och spänning på ledningens båda hälfter, få vi bland andra följande ekvationer:

$$v_m = A_1 s' - I_1 s_m$$

$$v_m = I_1 s_m - A_1 s''$$

Således:

$$s_m = \frac{A_1}{I_1} \cdot \frac{s' + s''}{2}$$

$$v_m = A_1 \frac{s' - s''}{2}$$

Häraf erhålles:

$$s_{1m} = \frac{A_1}{I_1} \cdot \frac{s_1' + s_1''}{2} + S\left(1 - \frac{A_1}{I_1}\right) = \frac{A_1}{I_1} \cdot \frac{W}{2R_1} + S\left(1 - \frac{A_1}{I_1}\right),$$

men

$$\frac{W}{2R_1} = S - \frac{\varepsilon(\bar{v}_0' - \bar{v}_0'')}{2R_1}$$

alltså:

$$s_{1m} = S - \frac{A_1}{2 I_1 R_1}\varepsilon(\bar{v}_0' - \bar{v}_0'') = S + \frac{\varepsilon \cdot \frac{d\bar{v}_0}{dx}}{r_1 + i\omega l_1} z\left(\frac{x}{2}\right)$$

eller om vi insätta värdet på S:

$$s_{1m} = -i\omega\left\{\frac{m_{01}s_0}{r_1 + i\omega l_1} + \frac{\varepsilon \frac{dv_0}{dx} \cdot c_1}{b^2}\left(1 - z\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right\}$$

Vidare är:

$$v_{1m} = \varepsilon\bar{v}_{0m} + A_1 \frac{s_1' - s_1''}{2} = \varepsilon\bar{v}_{0m}\left(1 - \frac{A_1}{I_1}\right) = \frac{R_2}{I_1}\varepsilon\bar{v}_{0m}$$

Således:

$$\left\{\begin{aligned} s_{1m} &= -i\omega\left\{\frac{m_{01}s_0}{r_1 + i\omega l_1} + \frac{\varepsilon \frac{dv_0}{dx} \cdot c_1}{b^2}\left(1 - z\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right\} \\ v_{1m} &= \frac{R_2}{I_1}\varepsilon\bar{v}_{0m} \end{aligned}\right.$$

R_2 är motståndsoperatorn för fjärdedelen af ledningen. Strömmen i ledningens midtpunkt är alltså oberoende af den statiska induktionen. Den spänning, som uppstår i ledningens midtpunkt är utom för mycket långa ledningar obetydlig och endast beroende på statisk induktion. För en 3 mm kopparledning af 400 km:s längd skulle $\frac{R_2}{I_1} = \frac{120}{1600} = 0{,}075$. Spänningen skulle alltså endast bli 7,5 % af den spänning, som ledningens midtpunkt skulle få, ifall ledningen vore isolerad.

Om vi bortse från termen $z\left(\frac{x}{2}\right)$, se vi, att den i midtpunkten inducerade strömmen är oberoende af ledningens längd. Induktionsströmmen på grund af spänningsfallet kan försummas. Vi skola belysa det föregående med ett exempel. Såväl kontaktledningen som telegrafledningen antaga vi befinna sig på 5,7 meters höjd öfver marken och deras inbördes afstånd vara 2,5 meter. Återledningen sker genom jorden. De båda ledningarnes konstanter äro då:

$r_1 = 60$ ohm	$\rho_0 = 4{,}55$ mm
$\omega l_1 = 90$ »	$r_0 = 0{,}269$ ohm
$\omega c_1 = 1{,}08 \cdot 10^{-6}$ mho	$\omega l_0 = 0{,}264$ »
$a_1 = 10^{-6}$ mho	$s_0 = 100$ ampère
$b^2 = 1{,}57 \cdot 10^{-4}\,(9°10')$	$v_{0m} = 15000$ volt
$b = 1{,}25 \cdot 10^{-2}\,(4°35')$	$\varepsilon = 0{,}196$
$\omega m_{01} = 5{,}04 \cdot 10^{-2}$	

Om vi antaga att telegrafledningen är x km lång och frånse vågbildningstendensen, skulle vi få följande inducerade strömmar vid ledningens ändpunkter:

Statisk inducerad ström	0,00159 x	$(90 + \mathrm{w})$	ampère
Elektromagnetisk »	0,047	$(\pm 90 - 30^\circ 40')$	»
På grund af spänningsfallet ind. ström	0,00000658 x^2	$(\pm 90^\circ + 45')$	»

Vi se, att i detta fall har den elektromagnetiska induktionen öfverhanden intill omkring 30 km. För längre ledningar är den statiska inducerade strömmen större.

Om afståndet mellan de båda ledningarne ökades från 2,5 till 10 meter, skulle alla tre induktionerna minskas i proportionen 0,27. Om återledningen helt skedde genom skenorna skulle den elektromagnetiska induktionen minskas (vid 2,5 meters afstånd) i proportionen 0,59, vid 10 meters distans i proportionen 0,093, d. v. s. till 2,5 % af ofvan angifna värde. Häraf se vi, hvilken stor variation, som kan uppstå i den elektromagnetiska induktionen därigenom, att strömmen till större eller mindre del använder skenorna som återledning.

Vi öfvergå nu till att beräkna de gränsvärden, till hvilka de inducerade strömmarne närma sig, i ofvanstående exempel, när ledningens längd ökas.

Vi välja då $-s_1'$ och antaga afståndet mellan ledningarne vara 2,5 m.

Stat. induktionen:	0,254	$(90^\circ + \mathrm{w} - 4^\circ 35')$	ampère
Elektromagn. »	0,047	$(90^\circ - 33^\circ 40')$	»
Spänningsfalls »	0,042	$(90^\circ + 35^\circ 10')$	»

INDUKTION I EN TELEGRAFLEDNING.

Vi antaga, att telegrafledningen följer kontaktledningen mellan tvenne punkter, som vi beteckna med 1 och 2. Motståndsoperatorerna från 1 och 2 till jord vid telegrafledningens båda ändar beteckna vi med η' och η'' resp.

I föregående problem hafva vi antagit strömmen i kontaktledningens alla punkter vara densamma. I så fall skulle spänningsfallet i denna ledning i hvarje ögonblick representeras af en rät linje. Emellertid öfverensstämmer detta icke med de verkliga förhållandena, när det är fråga om en längre, elektriskt drifven bansträcka. Kontaktledningen erhåller då en hel del matningspunkter; mellan dessa punkter antaga vi ett eller flere tåg taga elektrisk ström (strömaftagningspunkter). Mellan tvenne successiva punkter, där ström tillföres eller fråntages kontaktledningen kommer fortfarande spänningen att representeras af en rät linje, om isolationen är god. Men då strömmen blir olika i olika delar, kommer spänningen i kontaktledningen i sin helhet att representeras af en bruten linje med brytningspunkter i matnings- och strömaftagningspunkterna. Våra förut härledda ekvationer mellan inducerad ström och spänning gälla endast mellan tvenne successiva brytningspunkter. Vi skola därför undersöka, hvilken förändring, som inträder, om vi betrakta en del af ledningen AB, på hvilken brytningspunkter för kontaktledningsspänningen finnas. För att fixera uppgiften antaga vi, att tvenne brytningspunkter existera mellan A och B, belägna vid punkterna C och D. Spänning och ström i telegrafledningen vid punkterna A, C, D och B beteckna vi resp. med v_1' s_1', v_1''' s_1''', v_1^{IV} s_1^{IV} och v_1'' s_1''; operatorerna för ledningslängderna AC, CD och DB betecknas med I', A', R', I''', A''', R''' och I'', A'', R''. Strömmen S för de tre delarne beteckna vi med S', S''' och S'' resp.

Vi erhålla följande likhetssystem:

$$\begin{aligned}
v_1' - \varepsilon\bar{v}_0' &= I' \, (s_1' - S') - A'(s_1''' - S') \\
v_1''' - \varepsilon\bar{v}_0''' &= A' \, (s_1' - S') - I'(s_1''' - S') \\
v_1''' - \varepsilon\bar{v}_0''' &= I''' \, (s_1''' - S''') - A'''(s_1^{IV} - S''') \\
v_1^{IV} - \varepsilon\bar{v}_0^{IV} &= A'''(s_1''' - S''') - I''' \, (s_1^{IV} - S''') \\
v_1^{IV} - \varepsilon\bar{v}_0^{IV} &= I'' \, (s_1^{IV} - S'') - A''(s_1'' - S'') \\
v_1'' - \varepsilon\bar{v}_0'' &= A'' \, (s_1^{IV} - S'') - I''(s_1'' - S'')
\end{aligned}$$

Vi införa:

$$v_{0m} = \frac{1}{4}(v_0' + v_0''' + v_0^{IV} + v_0'')$$

$$I - A = R_1$$

Ekvationssystemet får då utseendet:

$$\begin{aligned}
v_1' - \varepsilon\bar{v}_{0m} + \varepsilon(\bar{v}_{0m} - \bar{v}_0') + R_1'S' &= I's_1' - A's_1''' \\
v_1''' - \varepsilon\bar{v}_{0m} + \varepsilon(\bar{v}_{0m} - \bar{v}_0''') - R_1'S' &= A's_1' - I's_1''' \\
v_1''' - \varepsilon\bar{v}_{0m} + \varepsilon(\bar{v}_{0m} - \bar{v}_0''') + R_1'''S''' &= I'''s_1''' - A'''s_1^{IV} \\
v_1^{IV} - \varepsilon\bar{v}_{0m} + \varepsilon(\bar{v}_{0m} - \bar{v}_0^{IV}) - R_1'''S''' &= A'''s_1''' - I'''s_1^{IV} \\
v_1^{IV} - \varepsilon\bar{v}_{0m} + \varepsilon(\bar{v}_{0m} - \bar{v}_0^{IV}) + R_1''S'' &= I''s_1^{IV} - A''s_1'' \\
v_1'' - \varepsilon\bar{v}_{0m} + \varepsilon(\bar{v}_{0m} - \bar{v}_0'') - R_1''S'' &= A''s_1^{IV} - I''s_1''
\end{aligned}$$

Af detta ekvationssystem framgår, att vi kunna tänka oss inverkan af kontakttråden bestå i en påtryckt konstant spänning $\varepsilon\bar{v}_{0m}$ (motsvarande en konstant spänning v_{0m} hos kontaktledningen) och elektromotoriska krafter, som befinna sig mellan de punkter, som svara mot brytningspunkterna och ledningsdelarne mellan dessa. Vid A få vi sålunda en emk lika med $\varepsilon(\bar{v}_{0m} - \bar{v}_0') + R_1'S'$; vid C få vi två elektromotoriska krafter, en mellan C och ledningen AC och en mellan C och ledningen CD. Mellan C och ledningen AC är den $-\varepsilon(\bar{v}_{0m} - \bar{v}_0''') + R_1'S'$ och mellan C och ledningsdelen CD $\varepsilon(\bar{v}_{0m} - \bar{v}_0''') + R_1'''S'''$. Dessa två elektromotoriska krafter sammansätta sig till en enda $R_1'S' + R_1'''S'''$. På samma sätt få vi i punkten D en elektromotorisk kraft $R_1'''S''' + R_1''S''$, och i punkten B slutligen en elektromotorisk kraft $\varepsilon(\bar{v}_0'' - \bar{v}_{0m}) + R_1''S''$.

Summera vi de elektromotoriska krafter, som sålunda äro förhanden i ledningen få vi som resultat:

$$\Sigma e = -\varepsilon(\bar{v}_0' - \bar{v}_0'') + 2[R_1'S' + R_1'''S''' + R_1''S'']$$

Om vi supponera, att spänningarne i begynnelse- och slutpunkten (d. v. s. i A och B) i kontaktledningen äro lika, få vi

$$\Sigma e = 2[R_1'S' + R_1'''S''' + R_1''S'']$$

Är vidare ledningslängden AB så liten, att vi kunna försumma inverkan af vågbildning, eller hvad som är detsamma, sätta $u(x') = u(x''') = u(x'') = 1$ för de tre ledningsstyckena AC, CD och DB, få vi

$$\begin{aligned}
\Sigma e &= -2i\omega m_0[s_0'x' + s_0'''x''' + s_0''x''] - \\
&\quad -2\varepsilon\left[\frac{d\bar{v}_0'}{dx}x' + \frac{d\bar{v}_0'''}{dx}x''' + \frac{d\bar{v}_0''}{dx}x''\right] = \\
&= -\frac{2i\omega m_0}{r_1 + i\omega l_1}(v_0' - v_0'') + 2\varepsilon(\bar{v}_0' - \bar{v}_0'') = 0
\end{aligned}$$

Summan af de elektromotoriska krafterna är sålunda noll. Emellertid kan man häraf icke sluta, att de inducerade strömmarne äro noll, och detta af två skäl. Först är i verkligheten $u(x)$ icke fullt lika med 1, och vidare äro de elektromotoriska krafterna placerade på olika punkter af AB. Vi skola med ett exempel längre fram visa, att dessa inducerade strömmar äro så små, att de alltid kunna försummas i förhållande till öfriga induktionsströmmar.

I det föregående hafva vi tänkt oss tvenne punkter, där spänningslinjen i kontaktledningen är bruten mellan A och B, men samma bevis är naturligtvis tilllämpligt, huru många dylika punkter som än finnas. Vi kunna därför allmänt uttala att: *induktionen i telegrafledningen är densamma som om kontaktledningen* *hade den konstanta spänningen* v_{0m}, *utgörande aritmetiska mediet mellan alla spänningar i brytningspunkterna och begynnelse- och slutpunkterna, samt om i alla brytningspunkter mellan A och B elektromotoriska krafter af typen* $R_1{}^i S^i + R_1{}^{i+1} S^{i+1}$ *placerades och slutligen i punkten A en elektromotorisk kraft* $-\varepsilon(\bar{v}_{0m} - \bar{v}_0{}')$ $+ R_1{}'S'$ *och i B* $-\varepsilon(\bar{v}_{0m} - \bar{v}_0{}'') - R_1{}''S''$ *anbragtes.* Om vidare tvenne brytningspunkter hafva samma potential och afståndet mellan dem är litet i förhållande till gränsen för kort ledning (för telegrafledningen), neutralisera de elektromotoriska krafter, som finnas mellan dessa punkter, hvarandra.

Om vi därför hade alla matningspunkterna af samma potential och en dylik matningspunkt funnes såväl i den punkt, där de två ledningarne börja som i den punkt där de sluta att gå parallellt, skulle vi i det allra närmaste vara ifrån den elektromagnetiska induktionen och induktionen på grund af spänningsfallet.

Vi öfvergå nu till att bestämma de *statiska induktionsströmmarne.* De statiska induktionsströmmarne äro enligt hvad vi sett desamma, som om hela kontaktledningen hade spänningen v_{0m} beräknad på sätt som ofvan angifvits. Induktionsströmmarne erhållas ur formelsystem II:

$$\text{vid } A \text{ från linjen till jord } \quad \frac{R_1 + \eta''}{\overline{R}} \,.\, i\omega q_m \,.\, u(x)$$

$$\text{» } B \text{ » » » » } \quad \frac{R_1 + \eta'}{\overline{R}} \,.\, i\omega q_m \,.\, u(x)$$

$$q_m = \varepsilon v_{0m} c_1 x$$

$$\overline{R} = R + \eta' + \eta'' + \frac{\eta'\eta''}{I}$$

För en kort telegrafledning är $u(x) = 1$, $R = 2R_1$ och $\frac{\eta'\eta''}{I} = 0$, således induktionsströmmen

$$\text{vid } A\text{:} \quad \frac{R_1 + \eta''}{2R_1 + \eta' + \eta''} \,.\, i\omega q_m$$

$$\text{vid } B\text{:} \quad \frac{R_1 + \eta'}{2R_1 + \eta' + \eta''} \,.\, i\omega q_m$$

Totala laddningsströmmen är således $= i\omega q_m$, och denna ström delar sig omvändt som motstånden från telegrafledningens midtpunkt till jord. Totala laddningsströmmen är proportionell mot ledningens längd.

När ledningens längd ökas, kommer R_1 att bli större än $\frac{R}{2}$; denna ökning i täljaren kompenseras dock delvis af $\frac{\eta'\eta''}{I}$ i nämnaren. Vidare kommer $u(x)$ att minskas. I det stora hela kommer därför totala laddningsströmmen från linje till jord att bli mindre än $i\omega q_m$, eller med andra ord laddningsströmmen ökas icke i proportion mot ledningslängden. Däremot är approximativt totala laddningen i det närmaste oberoende af apparaterna vid ledningens ändar.

För mycket långa ledningar närmar sig $x \,.\, u(x)$ gränsvärdet $\frac{1}{b}$. Induktionsströmmarne närma sig därför en bestämd gräns. När x ökas mot ∞, blir $I = R = R_1$. Vi kunna därför skrifva de gränser, mot hvilka induktionsströmmarne sträfva:

$$\text{vid } A\text{:} \quad \frac{R_\infty}{R_\infty + \eta'} \,.\, \frac{i\omega c_1 \varepsilon v_{0m}}{b}$$

$$\text{vid } B\text{:} \quad \frac{R_\infty}{R_\infty + \eta''} \,.\, \frac{i\omega c_1 \varepsilon v_{0m}}{b}$$

Vi tillämpa formlerna på ett exempel. Kontaktledningen antages bestå af en 8 mm koppartråd på 5,7 meters höjd öfver marken; telegrafledningen af en 4 mm järntråd på 5 meters höjd öfver marken och 4 meters afstånd från kontaktledningen Telegrafledningen är 400 km lång och följer hela vägen kontaktledningen. Om η' eller η'' representera batterimotstånd, antaga vi detsamma = 100 ohm, om de representera mottagningsapparat $1600 + i \,.\, 3000$ ohm. Medelspänningen i kontaktledningen antaga vi vara 14000 volt. $\omega = 2\pi \,.\, 26$.

Vi erhålla då:

$$\omega q_m = 2{,}05 \text{ ma per km}$$

$$\frac{1}{b} = 208$$

$$\eta' = 100$$

$$\eta'' = 1600 + i \,.\, 3000$$

$$R_1 = 1620\,(6^\circ) = 1610 + i \,.\, 170$$

$$R = 2380\,(-7^\circ 15') = 2360 - i \,.\, 300$$

$$I = 2500\,(-26^\circ 15') = 2240 - i \,.\, 1100$$

$$\overline{R} = 4470\,(24^\circ 20')$$

$$\frac{R_1 + \eta''}{\overline{R}} = 1{,}006\,(20^\circ 20')$$

$$\frac{R_1 + \eta'}{\overline{R}} = 0{,}385\,(-18^\circ 40')$$

$$u(x) = 0{,}68\ \ (-20^\circ 30')$$

Induktionsströmmen vid $A = 560$ ma

» » $B = 215$ »

Strömmen genom telegrafapparaten är sålunda, hvilket för öfrigt är självklart, betydligt mindre än strömmen genom batteriet. Induktionsströmmarne äro tydligen i detta fall så starka, att de hindra all telegrafering.

Vi antaga nu, att telegrafledningen är i hvila, det vill säga telegrafapparater inlänkade såväl vid A som B. I detta fall få vi:

$$\overline{R} = 7190\ (77^\circ 35')$$

Induktionsströmmen = 346 ma

Vi skola nu beräkna de värden, till hvilka induktionsströmmarne närma sig.

$$R_\infty = 2440\ (-16^\circ 45') = 2340 - \mathrm{i} \,.\, 705.$$

$$\frac{R_\infty}{R_\infty + \eta'} = 0{,}96\,(\ \ 0^\circ\ \ )$$

$$\frac{R_\infty}{R_\infty + \eta''} = 0{,}54\,(-46^\circ 55')$$

$$\frac{\varepsilon \omega c_1 v_{0m}}{b} = 425 \text{ ma}$$

Induktionsströmmen genom $A = 408$ ma

» » $B = 230$ »

Induktionsströmmen genom mottagningsapparaten är alltså praktiskt taget densamma som vid 400 km. Om telegrafering ej pågår, bli båda induktionsströmmarne 230 *ma*.

Såsom ett ytterligare exempel på den statiska induktionens inverkan skola vi tänka oss, att telegrafledningen endast en kortare sträcka följer kontaktledningen.

Om vi antaga, att de båda ledningarne följa hvarandra från ändan 1 och ett stycke framåt, ha vi att för η'' insätta motståndsoperatorn från den punkt, där ledningarne skiljas, till jord på stationen 2. Telegrafledningen låta vi vara 210 km lång och följa kontaktledningen 10 km; i öfrigt göra vi samma antaganden som i vårt föregående exempel. Ledningsoperatorerna för den del af ledningen, som ej följer kontaktledningen, beteckna vi med I, R och A. För de tio kilometerna kunna vi praktiskt taget sätta $I=\infty$ och $R=$ impedans för 10 km. Våra formler för bestämmandet af de inducerade strömmarne bli då:

$$\text{Induktionsströmmen genom } \eta': \frac{r+\frac{I}{I+\eta''}(R+\eta'')}{2r+\eta'+\frac{I}{I+\eta''}(R+\eta'')}\,.\,i\omega q_m$$

$$\text{Induktionsströmmen genom } \eta'': \frac{r+\eta'}{2r+\eta'+\frac{I}{I+\eta''}(R+\eta'')}\,.\,i\omega q_m$$

Här är r impedans för 5 km.

Vårt exempel ger följande värden:

$$I=3740\,(-39^\circ 45')=2880-i\,.\,2390$$
$$R=1620\,(\;6^\circ\;)=1610+i\,.\,169$$
$$R+\eta''=4520\,(45^\circ 40')$$
$$I+\eta''=4540\,(\;7^\circ 45')$$
$$\frac{I}{I+\eta''}(R+\eta'')=3720\,(-\;1^\circ 50')=3720-i\,.\,119$$
$$r=43{,}5\;(\;13^\circ 15')=\;43+i\,.\,10$$
$$i\omega q_m=20{,}5 \text{ ma}$$

Strömmen genom $\eta'=19{,}7$ »

» » $\eta''=\;1{,}08$ »

I detta fall hindras icke telegraferingen, men när telegrafering icke pågår och sålcdes elektricitetsmängden delar sig ungefär lika, komma telegrafapparaterna vid ändpunkterna att surra.

Af det föregående framgår, att så länge telegrafledningarne gå i närheten och parallellt med kontaktledningen, blir det nödvändigt att skaffa medel för den statiska induktionens upphäfvande.

Vi öfvergå nu till den elektromagnetiska induktionen.

Den *elektromagnetiska induktionen* och *induktionen på grund af spänningsfallet* hafva vi i det föregående sett åtminstone approximativt neutraliseras mellan matningspunkterna. Antaga vi därför en matningspunkt vid ändan 2, skulle vi endast få ett stycke från sidan 1 till närmaste matningspunkt, som icke neutraliseras. Den inducerade strömmen på grund af elektromagnetisk induktion erhålles då ur formelsystemet II, blott vi i stället för η'' insätta motståndsoperatorn från första matningspunkten till jord vid ändan 2. Vi beteckna denna motståndsoperator med $\bar{\eta}''$. Enligt (19) ha vi

$$\bar{\eta}''=\frac{I'}{I'+\eta''}(R'+\eta'')$$

om I', R' äro operatorer för ledningsstycket från första matningspunkten till jord vid 2. Ur formelsystem II få vi då strömmen vid 1 från jord till linjen:

$$\left(1+\frac{\bar{\eta}''}{I_1}\right).\frac{i\omega e}{\bar{R}}\,.\,u(l),$$

där $l =$ längden af den inducerande delen

$$\overline{R} = R + \eta' + \overline{\eta}'' + \frac{\eta'\overline{\eta}''}{I}$$

R motståndsoperatorn för ledningslängden l

I_1 isolationsoperatorn för halfva ledningen l

$e = m_{01} s_0 l$

Vi antaga afståndet mellan matningspunkterna vara 100 km och telegrafledningens längd 300 km. Den största längd, på hvilken induktion äger rum, blir då 100 km. Strömmen i kontaktledningen på denna sträcka antaga vi vara 200 ampère. För öfrigt användas samma konstanter och afstånd mellan ledningarne, som i föregående exempel. Vi erhålla:

$$\begin{aligned}
m &= 2{,}14 \,.\, 10^{-4} \\
e &= 4{,}28 \text{ volt} \\
\eta' &= 100 \\
\eta'' &= 1600 + 3000\,i \\
I_1 &= 6950\,(-\,39^\circ 45') \\
I &= 3740\,(-\,39^\circ 45') \\
\overline{\eta} &= 3720\,(-\,1^\circ 50') \\
\overline{R} &= 4745\,(\,4^\circ 5') \\
u(l) &= 0{,}98\,(-\,1^\circ 40')
\end{aligned}$$

Inducerade strömmen genom $\eta' = 205$ ma

» » » $\eta'' = 138$ »

Strömmen är tydligen alltför stark för att tillåta telegrafering. Äfven om afståndet mellan matningspunkterna vore 50 km, skulle induktionen bli alltför stark.

Det torde därför bli nödvändigt att placera matningspunkter vid *båda* ändarne af kontaktledningen. Vi skola nu undersöka huru stark induktion, som erhålles på grund af icke fullständig neutralisation mellan tvenne matningspunkter. För att förenkla resonemanget antaga vi endast en aftagningspunkt mellan matningspunkterna. Enligt hvad vi förut framhållit, kan induktionen på stycket i fråga ersättas med en konstant spänning i kontaktledningen och tvenne elektromotoriska krafter $R_1'S'$ och $R_1''S''$ i hvar sin ända af detta stycke samt en emk lika med $R_1'S' + R_1''S''$ vid strömaftagningspunkten. Att icke full neutralisation erhålles, beror dels därpå, att $u\left(\frac{x'}{2}\right)$ och $u\left(\frac{x''}{2}\right)$ icke äro lika för de två delar, i hvilka afståndet mellan matningspunkterna delas af aftagningspunkten, och dels af den orsaken, att de två elektromotoriska krafterna äro anbragta på ett afstånd från hvarandra och således på grund af läckning och kapacitet icke skulle åstadkomma samma ström, äfven om de vore lika. Vi skola undersöka hvad dessa två orsaker, hvar och en för sig, åstadkomma.

Hvad då först beträffar $u\left(\frac{x'}{2}\right)$ och $u\left(\frac{x''}{2}\right)$, så äro de lika, när aftagningspunkten ligger på ledningens midt. Största skillnaden i $u\left(\frac{x}{2}\right)$ erhålles, om strömaftagningspunkten ligger vid ena ändpunkten. Emellertid blir då induktionen liten, emedan afståndet till närmaste matningspunkt är ringa. Största verkan torde därför erhållas midt mellan dessa punkter. Om vi låta afståndet mellan de två matningspunkterna vara 100 km, ha vi då $x' = 75$ och $x'' = 25$ km; vi skola därför bestämma

$$u\left(\frac{x'}{2}\right) - u\left(\frac{x''}{2}\right).$$

Som emellertid $u(x)$ varierar långsamt, kunna vi skrifva

$$u\left(\frac{x'}{2}\right) - u\left(\frac{x''}{2}\right) = \frac{d}{dx}\Big[u(x'')\Big] \cdot \frac{x' - x''}{2}$$

men

$$\frac{d}{dx} u(x) = -\frac{2}{3} b^2 x \text{ approximativt}$$

alltså

$$\frac{d}{dx}\Big[u(x'')\Big] \cdot \frac{x' - x''}{2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(208)^2} \cdot 25 \cdot 25 = -0{,}0048$$

Induktionen blir således omkring 0,005 af det värde, den skulle hafva för en matningspunkt. Om vi antaga kontaktledningen 300 km lång, skulle inducerade strömmarne bli mellan 1,5 och 3 milliampère. För ett afstånd af 50 km skulle detta värde minskas till fjärdedelen.

Vi öfvergå nu till att undersöka den andra orsaken till att fullständig neutralisering icke erhålles, nämligen att de elektromotoriska krafter, som motverka hvarandra, icke ligga i samma punkt. De elektromotoriska krafterna voro $R_1'S'$ vid ena matningspunkten, $R_1'S' + R_1''S''$ vid strömaftagningspunkten och slutligen $R_1''S''$ vid andra matningspunkten. $R_1'S'$ vid första matningspunkten och $R_1''S''$ vid strömaftagningspunkten äro lika men riktade åt motsatt håll, och samma är förhållandet med $R_1'S'$ vid strömaftagningspunkten och $R_1''S''$ vid andra matningspunkten. Största afståndet mellan tvenne lika elektromotoriska krafter blir därför afståndet mellan de två matningspunkterna. Vi beteckna matningspunkterna med A och B, ledningsoperatorerna från A till jord med I', R' och A'; från B till jord med I'', R'' och A''; och slutligen för ledningen mellan A och B med I, R och A samt för halfva denna ledning med I_1, R_1 och A_1. Om vi tillämpa formel (4) på ledningen AB få vi:

$$v' - v'' = 2(I - A)\frac{s' + s''}{2} = R_1(s' + s'')$$

$$\frac{v' + v''}{2} = \frac{I + A}{2}(s' - s'') = \frac{I_1}{2}(s' - s'')$$

Af dessa formler framgår, att ledningen AB kan vid beräkning af strömstyrkor och spänningar utom densamma betraktas som ett motstånd lika med $2R_1$ med en afledning på midten lika med $\frac{I_1}{2}$.

Vi antaga aftagningspunkten placerad midt på AB i C. Den i A applicerade elektromotoriska kraften kalla vi e. Den ström, denna åstadkommer till jord åt C till, blir då:

$$\frac{e}{R_1 + R' + \dfrac{(R_1 + R'')\frac{I_1}{2}}{R_1 + R'' + \frac{I_1}{2}}} \cdot \frac{\frac{I_1}{2}}{R_1 + R'' + \frac{I_1}{2}}$$

Samma elektromotoriska kraft placerad i C skulle åstadkomma en ström lika med:

$$\frac{e}{\dfrac{(R'+R_1)\dfrac{I_1}{2}}{R'+R_1+\dfrac{I_1}{2}}+R''+R_1}$$

Vi kunna skrifva dessa strömmar under formen:

$$\frac{\dfrac{I_1}{2}}{(R_1+R')(R_1+R'')+\dfrac{I_1}{2}(2R_1+R'+R'')}\,e$$

$$\frac{R'+R_1+\dfrac{I_1}{2}}{(R_1+R')(R_1+R'')+\dfrac{I_1}{2}(2R_1+R'+R'')}\,e$$

Skillnaden i ström blir alltså:

$$\frac{e}{R_1+R''+\dfrac{I_1}{2}\left[1+\dfrac{R_1+R''}{R_1+R'}\right]}$$

Inducerade strömmen blir dubbla detta värde. Om endast en matningspunkt varit för handen, hade den inducerade elektromotoriska kraften varit $2e$, och den ström som erhållits i C blefve summan af strömmarne. Vi se därför, att den induktion, som verkligen uppkommer, förhåller sig till den, när endast en matningspunkt finnes, som

$$\frac{2(R_1+R')}{R_1+R'+I_1}$$

INDUKTIONSSTÖRNINGAR I EN DUBBELLEDNING.

Genom att tillräckligt starkt skrufva en dubbelledning ernås, att de elektromotoriska krafter, som induceras i de två branscherna, blifva lika och den totala laddning, som ena branschen upptar på ett skrufningshvarf lika med noll. Vi få därför ej (under förutsättning att branscherna äro lika) några strömmar, som genomgå de apparater, hvilka äro inlänkade vid dubbelledningens ändpunkter. Induktionsströmmar äro dock för handen i själfva ledningen. Om ledningen är lång, hafva vi nämligen dels induktionsströmmar af elektromagnetisk art, hvilka bli störst vid ledningens midt och aftaga mot ändarne, och dels hafva vi strömmar inom hvarje skrufhvarf på grund af laddningarnes neutralisation och slutligen strömmar från jord till linje på grund af statisk induktion.

I det följande antaga vi, att skrufningen är gjord tillräckligt god. Några induktionsströmmar genom apparaterna skulle då ej uppkomma under förutsättning, att de båda branscherna äro lika i alla afseenden. Om däremot motståndet ökas på en af branscherna eller den ena blir sämre isolerad än den andra, kunna vi vänta att induktion uppstår. Vår närmaste uppgift är nu att bestämma huru stora dessa störningar kunna blifva. Först skola vi då uppställa de allmänna ekvationerna för inducerade strömmar i en dubbelledning.

Under förutsättning att de två branscherna hafva samma elektriska konstanter, men befinna sig på olika afstånd från kontaktledningen, hafva vi följande ekvationssystem för längdenheten af ledningen:

$$\begin{cases}
(r_1+i\omega l_1)s_1+i\omega m_{12}s_2+i\omega m_{01}s_0=-\dfrac{dv_1}{dx}\\
(r_1+i\omega l_1)s_2+i\omega m_{12}s_1+i\omega m_{02}s_0=-\dfrac{dv_2}{dx}\\
-i\omega q_1=a_1v_1+\dfrac{ds_1}{dx}\\
-i\omega q_2=a_2v_2+\dfrac{ds_2}{dx}\\
v_0=q_0k_0+q_1k_{01}+q_2k_{02}\\
v_1=q_0k_{01}+q_1k_1+q_2k_{12}\\
v_2=q_0k_{02}+q_1k_{12}+q_2k_1
\end{cases}$$

Beteckningarne äro samma, som i den förra delen af detta arbete.

Man kan nu betrakta dubbelledningen antingen såsom en enkelledning bestående af tvenne parallella trådar, då strömmen i densamma skulle representeras af s_1+s_2 och spänningen af $\frac{v_1+v_2}{2}$; eller ock såsom dubbelledning, då ena branschen tjänar som återledning för strömmen i den andra. Från denna synpunkt skulle vi ha strömmen $\frac{1}{2}(s_1-s_2)$ och spänningen v_1-v_2 i en punkt af ledningen. Vi införa därför följande beteckningar:

$$\begin{aligned}
s_1+s_2&=\overline{\overline{S}}\\
\frac{1}{2}(v_1+v_2)&=\overline{\overline{V}}\\
q_1+q_2&=\overline{\overline{Q}}\\
\frac{1}{2}(s_1-s_2)&=\overline{S}\\
(v_1-v_2)&=\overline{V}\\
\frac{1}{2}(q_1-q_2)&=\overline{Q}
\end{aligned}$$

$\overline{\overline{S}}$ blir tydligen den ström, som genomgår apparaterna vid ledningens ändpunkter och som sålunda åstadkommer störning för telefonering. Ty vid ledningens ändpunkter ha vi $s_1=-s_2$, alltså $\overline{S}=s_1$ och $\overline{\overline{S}}=0$.

Genom att addera och subtrahera ekvationerna, som svara mot de två branscherna, få vi med dessa beteckningar:

$$\begin{cases}
\dfrac{1}{2}(r_1+i\omega l_1+i\omega m_{12})\overline{\overline{S}}+i\omega s_0\dfrac{m_{01}+m_{02}}{2}=-\dfrac{d\overline{\overline{V}}}{dx}\\
-i\omega\overline{\overline{Q}}=2a_1\overline{\overline{V}}+\dfrac{d\overline{\overline{S}}}{dx}\\
v_0=q_0k_0+\overline{Q}(k_{01}-k_{02})+\overline{\overline{Q}}\dfrac{k_{01}+k_{02}}{2}\\
\overline{\overline{V}}=q_0\dfrac{k_{01}+k_{02}}{2}+\overline{\overline{Q}}\dfrac{k_1+k_{12}}{2}
\end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(r_1 + i\omega l_1 - i\omega m_{12})\overline{S} + i\omega s_0(m_{01} - m_{02}) = -\frac{d\overline{V}}{dx} \\ -i\omega\overline{Q} = \frac{a_1}{2}\overline{V} + \frac{d\overline{S}}{dx} \\ v_0 = q_0 k_0 + \overline{Q}(k_{01} - k_{02}) + \overline{\overline{Q}}\frac{k_{01}+k_{02}}{2} \\ \overline{V} = q_0(k_{01} - k_{02}) + \overline{Q}\,.\,2(k_1 - k_{12}) \end{cases}$$

Om vi frånse ekvationen i v_0, äro dessa två ekvationssystem olika hvarandra. Men termerna $\overline{Q}$ och $\overline{\overline{Q}}$ i ekvationen för v_0 äro små, hvarför vi kunna negligera i första systemet $\overline{Q}(k_{01} - k_{02})$ och i det andra $\overline{\overline{Q}}\frac{k_{01}+k_{02}}{2}$.

De två systemen bli därigenom till formen fullständigt identiska med det ekvationssystem vi erhöllo för en enkel ledning. Vi hafva därför äfven identiska lösningar. Anmärkas bör, att vår ledning får olika konstanter, när den betraktas såsom enkelledning och som dubbelledning.

Strömmen $\overline{S}$ blir noll, om vi hafva $m_{01} = m_{02}$ och $k_{01} = k_{02}$. Detta inträffar med god approximation, om ledningen är skrufvad. Hvad $\overline{\overline{S}}$ beträffar, delar den sig i så fall lika mellan de två trådarne.

PROBLEM 4.

Bestäm den inducerade ström, som genomgår telefonapparaterna vid en dubbelednings ändpunkter, om jämnvikten störes genom inkoppling af ett motstånd i ena branschen.

För att erhålla en öfverskådlig lösning på detta problem uppställa vi följande teorem:

Om i ett ledningskomplex ett motstånd η utan kapacitet inkopplas, blir den ökning i ström, som genomgår komplexets olika delar samma som skulle åstadkommas genom inkopplingen af en elektromotorisk kraft inlänkad i punkten i fråga lika med ηS, där S är strömmen vid denna punkt före inkopplingen. Denna elektromotoriska kraft skall riktas i motsatt riktning mot S.

Ty om vi mellan tvenne punkter med potentialerna v' och v'' och strömstyrkorna s' och s'' hafva ett ledningskomplex, kunna vi skrifva

$$\begin{aligned} v' &= Is' - As'' + \Sigma k_i e_i \\ v'' &= As' - Js'' + \Sigma h_i e_i \end{aligned}$$

där e_i äro de i ledningen förekommande elektromotoriska krafterna och k och h ledningsoperatorer. Detta emedan ekvationerna med nödvändighet skola vara linjära i e, s och v. I, A och J äro samma storheter, som i våra allmänna formler. Detta inses däraf, att om vi sätta alla e lika med noll, våra formler med nödvändighet måste öfvergå till formelsystem (15). Låta vi nu v' och v'' vara samma spänning v i den punkt, där motståndet skall inlänkas, och följaktligen s' och s'' samma ström s, få vi för bestämmande af s:

$$(I + J - 2A)s + \Sigma(k_i - h_i)e_i = 0$$

Tänka vi oss nu vårt motstånd η inkoppladt och $\bar{s}$ den nya strömstyrkan genom η, få vi ekvationerna

$$\begin{cases} \bar{v} = I\bar{s} - A\bar{s} + \Sigma k_i e_i \\ \eta\bar{s} + \bar{v} = A\bar{s} - J\bar{s} + \Sigma h_i e_i \end{cases}$$

där $\bar{v}$ är spänningen i den punkt, där strömmen $\bar{s}$ först träffar η. Genom subtraktion få vi för bestämmandet af $\bar{s}$:

$$-\eta\bar{s} = (I + J - 2A)\bar{s} + \Sigma(k_i - h_i)e_i$$

Ökningen i ström är $\bar{s} - s$; denna erhålla vi genom att subtrahera ekvationen för s från den för $\bar{s}$:

$$-\eta\bar{s} = (I + J - 2A)(\bar{s} - s)$$

Men vi kunna skrifva denna likhet:

$$-\eta s - \eta(\bar{s} - s) = (I + J - 2A)(\bar{s} - s)$$

eller

$$-\eta s = (I + \eta + J - 2A)(\bar{s} - s);$$

men detta är just ekvationen för den ström, som en elektromotorisk kraft ηs placerad i den punkt, där strömmen $\bar{s}$ först träffar motståndet η skulle åstadkomma, emedan enligt (19[1]) $I + \eta$ är värdet på I, sedan η blifvit inkopplad.

Vi skola tillämpa detta teorem på vårt problem. Strömmen genom den punkt, där η inkopplas före denna inkoppling, är $\frac{\bar{\bar{S}}}{2}$. Den ström, som genomgår systemet efter inkopplingen är därför samma, som förutvarande plus den ström, som $-\frac{\bar{\bar{S}}}{2}\eta$ åstadkommer. För strömmen genom apparaterna vid ändpunkterna ha vi förut värdet noll; strömmen genom dessa apparater är därför samma, som elektromotoriska kraften $-\frac{\bar{\bar{S}}}{2}\eta$ åstadkommer. Genom detta sätt att se saken bli vi oberoende af kontaktledningens ström och spänning annat än för beräkning af $\bar{\bar{S}}$ vid en fullt balanserad ledning.

Vi skola då först undersöka $\bar{\bar{S}}$ på olika ställen i ledningen. $\bar{\bar{S}}$ är oberoende af de apparater, som äro inkopplade i ledningens ändpunkter, såvida dessa äro utan kapacitet och afledning. $\bar{\bar{S}}$ blir noll vid ändpunkterna och maximum vid ledningens midtpunkt. $\bar{\bar{S}}$ ökas med ledningens längd. För att beräkna $\bar{\bar{S}}$ i en punkt hv. s. h. bestämma vi först $\bar{\bar{S}}_m$ i ledningens midtpunkt. För ledningens båda hälfter ha vi bland andra ekvationerna

$$\bar{\bar{V}}_m - \varepsilon\bar{v}_{0m} = -\bar{\bar{A}}_1 S - \bar{\bar{I}}_1(\bar{\bar{S}}_m - S)$$
$$\bar{\bar{V}}_m - \varepsilon\bar{v}_{0m} = \bar{\bar{I}}_1(\bar{\bar{S}}_m - S) + \bar{\bar{A}}_1 S$$

Häraf erhålles:

$$\bar{\bar{I}}_1(\bar{\bar{S}}_m - S) = -\bar{\bar{A}}_1 S$$

eller

$$\bar{\bar{S}}_m = \frac{\bar{\bar{R}}_2}{\bar{\bar{I}}_1} S$$

S har samma betydelse som i våra grundekvationer, $\bar{\bar{R}}_2$ är motståndsoperatorn för fjärdedelen af ledningen.

Om vi införa för $\bar{\bar{R}}_2$ och $\bar{\bar{I}}_1$ dess värden ur (12) och S ur (27) samt använda förkortningen

$$E = -i\omega m_{01}s_0 - \varepsilon\frac{d\bar{v}_0}{dx},$$

få vi för $\bar{\bar{S}}_m$:

$$\bar{\bar{S}}_m = (\bar{a} + i\omega\bar{c})\frac{l^2}{8} \cdot E \cdot u\left(\frac{l}{4}\right) \cdot u\left(\frac{l}{2}\right)$$

eller om vi bortse från vågbildningen:

$$\bar{\bar{S}}_m = (\bar{\bar{a}} + i\omega\bar{\bar{c}})\frac{l^2}{8} \cdot E.$$

där l är ledningens längd.

Vi se häraf, att $\bar{\bar{S}}_m$ är approximativt proportionell mot kvadraten på ledningens längd. Vidare framgår, att med bortseende från termerna för vågbildning, hvilka å telefonledningar af koppar alltid äro små, $\bar{\bar{S}}_m$ är oberoende af motstånd och självinduktion, däremot beroende af $\bar{\bar{a}}+i\omega\bar{\bar{c}}$. *Vidare är $\bar{\bar{S}}_m$ oberoende af den statiska induktionen.*

Vi öfvergå nu att bestämma $\bar{\bar{S}}$ i en punkt, hvilken som helst. Vi antaga punkten befinna sig på afståndet x från ledningens ena ändpunkt. För tillfället beteckna vi motståndsoperatorerna för detta stycke med I, A och R, potentialen i ledningens ändpunkt med V' och strömmen i punkten x med $\bar{\bar{S}}$.

Vi ha då ekvationen:

$$V' - \varepsilon\bar{v}_0' = -IS - A(\bar{\bar{S}} - S)$$

men
$$V' - \varepsilon\bar{v}'_0 = -\bar{\bar{R}}_1 S$$

Följaktligen:
$$-\bar{\bar{R}}_1 S + R_1 S = -A\bar{\bar{S}}$$

eller
$$\bar{\bar{S}} = \frac{\bar{\bar{R}}_1 - R_1}{A} \cdot S$$

Om vi frånse från termerna för vågbildning, kunna vi skrifva

$$\bar{\bar{S}} = (\bar{\bar{a}} + i\omega\bar{\bar{c}})x(l-x)\frac{E}{2}$$

Vid ändpunkten är $\bar{\bar{S}}$ noll och samma vid andra ändpunkten $x = l$. Strömstyrkan $\bar{\bar{S}}$ och följaktligen äfven den inducerade elektromotoriska kraften varierar efter en parabel med axel genom ledningens midtpunkt och gående genom ledningens ändar.

Liksom $\bar{\bar{S}}_m$ är $\bar{\bar{S}}$ oberoende af den statiska spänningen.

Den induktion, som uppkommer på grund af ökning i motståndet i ena branschen, är sålunda enbart beroende af elektromagnetisk induktion och induktion på grund af spänningsfallet.

Om därför dessa induktioner kunde upphäfvas t. ex. genom användande af täta transformatorstationer samt dylika vid hvarje sektions båda ändpunkter, skulle ingen induktion på grund af motståndsökning i ena branschen uppkomma.

Af det föregående framgår, att störningen af balansen hos en dubbelledning genom ökning af motståndet i ena branschen är olika stor alltefter motståndsökningens läge. Störningen blir störst vid midtpunkten, där den inducerade elektromotoriska kraften blir

$$\eta\frac{\bar{\bar{S}}}{2} = \eta(\bar{\bar{a}} + i\omega\bar{\bar{c}})\frac{l^2}{16}E$$

och aftar mot ändarne i proportionen

$$1 - \left(\frac{y}{l}\right)^2,$$

där y är afståndet från midtpunkten.

Vi skola tillämpa dessa formler på ett exempel.

Kontaktledningen består af 8 mm koppartråd på 5,7 meters höjd öfver marken. Strömmen i densamma antaga vi vara 200 ampère. Telefonledningen består af en 3 mm dubbelledning (0,5 meter mellan branscherna) på 5,5 meters höjd öfver marken och 300 km lång. Telefonledningen antages följa kontaktledningen utefter hela sin längd. Afståndet mellan ledningarne antages vara 4 meter. I telefonledningens midtpunkt har motståndet i ena branschen ökats med 20 ohm.

En beräkning lämnar då:

$$\overline{\overline{a}} = 0{,}2 \ . \ 10^{-6}$$
$$\omega\overline{\overline{c}} = 1{,}49 \ . \ 10^{-6}$$
$$E = -0{,}137 \, [0{,}34 + i \, 0{,}0077] \, 200 = -9{,}3 \text{ volt}$$

Inducerad emk $= 1{,}55$ volt.

Den ström, som den inducerade spänningen åstadkommer, erhålles ur ekvationerna för ström och spänning när ledningen betraktas såsom enkelledning. Om R' och R'' äro motståndsoperatorerna för de delar, i hvilka η delar ledningen (d. v. s.

$$R' = \frac{\overline{I}'}{\overline{I}' + \eta'} (\overline{R}' + \eta')$$

där $\overline{R}'$ är motståndsoperatorn för själfva linjen), $\overline{S}$ strömstyrkan vid η och $\overline{V}$ spänningen vid samma motstånd närmast ändan 1 af ledningen, samt e den inducerade elektromotoriska kraften $-\eta\frac{\overline{\overline{S}}}{2}$, få vi följande likheter:

$$\overline{V} = -\overline{S}R'$$
$$\overline{V} + e = \overline{S}R''$$

alltså

$$\overline{S} = \frac{e}{R' + R''}$$

Strömstyrkan genom apparaten vid 1 erhålles sedan ur likheten

$$\overline{S}' = \frac{\overline{A}'}{\overline{I}' + \eta'} \overline{S}$$

och strömstyrkan genom apparaten vid 2 ur

$$\overline{S}'' = \frac{\overline{A}''}{\overline{I}'' + \eta'} \overline{S},$$

där η' är motståndsoperatorn för apparaterna vid ena ändpunkten. Om vi frånse från vågbildningen, kunna vi skrifva $\overline{A}' = \overline{I}'$ och $\overline{A}'' = \overline{I}''$. Om vi göra detta och motståndsökningen är belägen på halfva ledningen, få vi:

$$\overline{S}' = \frac{\overline{I}_1}{\overline{I}_1 + \eta'} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{R_1}$$

men

$$R_1 = \frac{\overline{I}_1}{\overline{I}_1 + \eta'} (\overline{R}_1 + \eta')$$

alltså:

$$\overline{S}' = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{\overline{R}_1 + \eta'}$$

För 300 km. och $\eta' = 300 + i \, . \, 30$ skulle $\overline{S}' = 0{,}75$ ma ungefär. För telefonering är $0{,}1$ ma nödvändig. Störningen blir dock ganska stark, enär hörtelefonen är utomordentligt känslig för enkelt periodiska strömmar.

Vi öfvergå nu till det fall, att störningen inträffar på grund af en ökning i läckning från ena branschen.

PROBLEM 5.

Bestäm den inducerade ström, som genomgår telefonapparaterna vid en dubbelednings ändpunkter, om jämnvikten störes genom uppkomsten af en afledning på ena branschen.

Här begagna vi oss af en sats liknande den i förra problemet.

TEOREM.

Om i ett ledningskomplex en ny ledning inkopplas, blir den ökning i ström, som härigenom erhålles i ledningskomplexets delar samma, som skulle åstadkommas af en elektromotorisk kraft lika med spänningen mellan de båda punkterna före inkopplingen, inlänkad i den inkopplade ledningen. Denna fiktiva elektromotoriska kraft är riktad åt samma håll som det förutvarande spänningsfallet.

Såsom bevis för denna sats behöfva vi endast anföra, att om ledningen, som inkopplas, före inkopplingen förses med denna fiktiva elektromotoriska kraft, men åt motsatt håll, ingen förändring i systemet uppkommer. Det förutvarande strömsystemet är därför ekvivalent med det, som inställer sig efter inkopplingen minus det, som den fiktiva elektromotoriska kraften åstadkommer. Det nya strömsystemet är sålunda lika med det gamla plus det, som den införda fiktiva elektromotoriska kraften skulle åstadkomma.

Vi skola tillämpa denna sats på vårt problem. Spänningen i den punkt, där afledningen inlänkas, antaga vi vara $\overline{\overline{V}}$, när ingen afledning förefinnes. Strömmen genom telefonapparaterna före afledningens inlänkande var noll på grund däraf, att telefonledningen antogs vara tillräckligt skrufvad. Enda orsaken till ström är då den fiktiva elektromotoriska kraften $\overline{\overline{V}}$ placerad i afledningen, hvars motstånd vi beteckna med η. Vårt strömsystem består sålunda af vår dubbelledning, som utgör ena belägget till en kondensator, hvars andra belägg är jorden. Denna kondensator upp- och urladdas genom motståndet η af elektromotoriska kraften $\overline{\overline{V}}$, som är lika med den spänning, som skulle förefinnas i afledningspunkten på ledningen, då ingen afledning vore för handen. Om ledningen är kort, delar sig laddningen lika mellan de två branscherna. Halfva laddningen måste därför passera apparaterna vid ändpunkterna. Laddningens storlek blir approximativt oberoende af apparaterna vid ändpunkterna.

Om vi därför antaga ledningen kort och dess totala kapacitet i förhållande till jord c, skulle den sammanlagda ström, som genomgår de två apparaterna vid ledningens ändpunkter bli
$$\frac{1}{2}\frac{\overline{\overline{V}}}{\eta+\frac{1}{i\omega c}}.$$

Denna ström kommer att dela sig omvändt proportionellt mot motstånden i de delar, som afledningspunkten delar dubbelledningen uti.

Under alla förhållanden blifva inducerade strömmarne proportionella mot $\overline{\overline{V}}$. Om afledningen är belägen på dubbelledningens midt få vi $\overline{\overline{V}}=\varepsilon v_{0m}$, d. v. s. induktionen är i motsats till hvad som var förhållandet i föregående problem helt af statisk art. Om däremot afledningen är belägen i en annan punkt, så tillkommer en elektromagnetisk spänning och en spänning på grund af spänningsfallet. Som vi emellertid sågo i problem 1 är denna andra spänning af liten vikt i förhållande till den statiska, hvarför vi kunna påstå, att den inducerade strömmen hufvudsakligen beror på statisk induktion. Vidare se vi, att hvarhelst afledningen än är belägen, få vi ungefär samma induktion, något mer vid ena ändan och något mindre vid den andra. (Vi undantaga fallet, att afledningen befinner sig i midtpunkten på en af apparatanordningarne vid ändpunkterna.)

Efter denna allmänna orientering öfvergå vi till att beräkna de inducerade strömmarne.

Vi beteckna ledningens ändpunkter med A och B samt den punkt, där afledningen finnes med C. Strömmarne vid ändpunkterna A och B beteckna vi med $\overline{S}'$ och $\overline{S}''$ resp. Strömstyrkorna vid punkten C äro på sidan A $\overline{S}$ och $\overline{\overline{S}}$ och på sidan B $\overline{S}_1$ och $\overline{\overline{S}}_1$. I allmänhet beteckna vi storheter, som förekomma, när vi betrakta ledningen som en dubbel enkelledning med två streck, däremot med ett streck, när vi räkna ledningen som en verklig dubbelledning. Strömmen genom afledningen från linjen till jord beteckna vi med s och spänningarne vid afledningspunkten på dubbelledningen $\overline{V}$ och $\overline{\overline{V}}$. Den spänning, som skulle vara förhanden i den punkt, där afledningen stöter i hop med branschen 2, om ingen afledning funnes, låta vi vara e.

Vi få då följande ekvationer:

$$\overline{S}_1 = \overline{S} + \frac{s}{2}$$
$$-\overline{V} = \overline{R}'\overline{S}$$
$$\overline{V} = \overline{R}''\left(\overline{S} + \frac{s}{2}\right)$$
$$\overline{\overline{S}}_1 = \overline{\overline{S}} + s$$
$$-\overline{\overline{V}} = \overline{\overline{I}}'\overline{\overline{S}}$$
$$\overline{\overline{V}} = \overline{\overline{I}}''(\overline{\overline{S}} + s)$$
$$\overline{\overline{V}} - \frac{\overline{V}}{2} = v_2$$
$$v_2 = -e + \eta s$$

v_2 är spänningen i den punkt, där afledningen råkar branschen 2.

Ur andra och tredje samt femte och sjätte af dessa ekvationer få vi:

$$\overline{V} = \frac{\overline{R}'\overline{R}''}{\overline{R}' + \overline{R}''} \cdot \frac{s}{2}$$
$$\overline{\overline{V}} = \frac{\overline{\overline{I}}'\overline{\overline{I}}''}{\overline{\overline{I}}' + \overline{\overline{I}}''} \cdot s$$

Ur de två sista sedan:

$$s = -\frac{e}{\eta + \frac{\overline{\overline{I}}'\overline{\overline{I}}''}{\overline{\overline{I}}' + \overline{\overline{I}}''} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\overline{R}'\overline{R}''}{\overline{R}' + \overline{R}''}}$$
$$\overline{S} = -\frac{\overline{R}''}{\overline{R}' + \overline{R}''} \cdot \frac{s}{2}$$
$$\overline{S}_1 = \frac{\overline{R}'}{\overline{R}' + \overline{R}''} \cdot \frac{s}{2}$$

Strömstyrkorna $\overline{S}'$ och $\overline{S}''$ erhållas sedan ur relationerna

$$\overline{S}' = \frac{\overline{A}'}{\overline{J}'} \cdot \overline{S}$$
$$\overline{S}'' = \frac{\overline{A}''}{\overline{J}''} \cdot \overline{S}_1$$

Här är

$$\overline{J}' = \overline{I}' + \eta'$$
$$\overline{J}'' = \overline{I}'' + \eta',$$

där η' är motståndsoperatorn för apparaterna vid ena ändpunkten.

Såsom specialfall välja vi att afledningen ligger dels vid ena ändan af dubbelledningen och dels på midten.

1. AFLEDNINGEN BELÄGEN VID ÄNDPUNKTEN A.

Då är

$$\overline{A}' = \overline{I}' = \infty; \quad \overline{\overline{I}}' = \infty; \quad \overline{R}' = \eta'$$
$$\overline{A}'' = A; \quad \overline{I}'' = \overline{I}; \quad \overline{R}'' = \frac{\overline{I}}{I + \eta'}(\overline{R} + \eta').$$

Vårt ekvationssystem kan då skrifvas:

$$\bar{S}' = -\frac{\bar{R}''}{\eta' + \bar{R}''}\cdot\frac{s}{2} = -\frac{\bar{I}}{\bar{I}+\eta'}\cdot\frac{\bar{R}+\eta'}{\eta'+\bar{R}''}\cdot\frac{s}{2}$$

$$\bar{S}'' = \frac{\bar{A}}{\bar{I}+\eta'}\cdot\frac{\eta'}{\eta'+\bar{R}''}\cdot\frac{s}{2}$$

$$s = \frac{e}{\eta + \bar{\bar{I}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\eta\bar{R}''}{\eta + \bar{R}''}}$$

Som vi med god approximation kunna skrifva $\bar{I} = \bar{A}$ framgår det att de strömmar som genomgå apparaterna vid ändpunkten förhålla sig omvändt som η' till $\bar{R}+\eta'$.

För en kort ledning kunna vi nämligen skrifva

$$\bar{S}' = -\frac{\bar{R}+\eta'}{\bar{R}+2\eta'}\cdot\frac{s}{2}$$

$$\bar{S}'' = \frac{\eta'}{\bar{R}+2\eta'}\cdot\frac{s}{2}$$

Totala strömmen som öfvergår på branschen 1 är $\bar{S}' - \bar{S}''$, i detta fall alltså lika med $\frac{s}{2}$, d. v. s. laddningarne dela sig lika mellan branscherna.

2. AFLEDNINGEN BELÄGEN VID MIDTPUNKTEN AF DUBBELLEDNINGEN.

Då är:

$$\bar{I}' = \bar{I}'' = \bar{I}_1$$
$$\bar{R}' = \bar{R}'' = \bar{R}_1$$
$$\bar{\bar{I}}' = \bar{\bar{I}}'' = \bar{\bar{I}}_1$$
$$\bar{A}' = \bar{A}'' = \bar{A}_1$$

Således:

$$\bar{S}' = -\frac{\bar{A}_1}{\bar{I}_1+\eta'}\cdot\frac{s}{4}$$

$$\bar{S}'' = \frac{\bar{A}_1}{\bar{I}_1+\eta'}\cdot\frac{s}{4}$$

$$s = \frac{e}{\eta + \frac{1}{2}\bar{\bar{I}}_1 - \frac{1}{8}\bar{R}_1}$$

Vi skola beräkna ett exempel.

Vi antaga samma telefondubbelledning som i problem 4 och af 400 km:s längd. Afledningen antaga vi vara placerad vid telefonledningens midtpunkt. Spänningen i kontaktledningen i medeltal 14000 volt. Vi hafva $\varepsilon = 0{,}137$, således $\bar{\bar{V}} = 1920$ volt. Afledningens motstånd låta vi vara 100000 ohm

$$\eta = 100000$$
$$\eta' = 300 + i\,.\,30$$

Vi få:

$$\bar{\bar{I}}_1 = 3320\,(-80°20')$$
$$\bar{R}_1 = 965\,(1°40')$$
$$\bar{I}_1 = 6740\,(-86°40')$$
$$e = 1920 \text{ volt}$$
$$s = 19{,}2 \text{ ma}$$
$$\bar{S}' = 4{,}8 \text{ ma}$$

Denna ström är tillräcklig för att förstöra telefoneringen.

För η större än 100000 kunna vi i detta fall tydligen skrifva

$$\bar{S}' = \frac{\bar{\bar{V}}}{\eta}$$

MÄTNINGAR VID FÖRSÖKSBANAN.

De mätningar, som utförts för att bestämma storleken af induktionen hafva, som naturligt är, på grund af försöksbanans ringa utsträckning hufvudsakligast gått ut på att verifiera de konstanter, som äro bestämmande för induktionens storlek. Mätningar hafva utförts dels på särskildt anordnade ledningar och dels på de ledningar, som gå parallellt med försöksbanan. De flesta mätningarne hafva utförts på sträckan Tomteboda—Värtan. På denna sträcka befinner sig kontakttråden, som utgöres af en 8 mm koppartråd, på cirka 5,7 meters höjd öfver skenorna. Mellan Tomteboda och Albano är kontakttråden upphängd med bärtråd af 6 mm diameter. Mellan Albano och Värtan är upphängningen direkt. I stället är mellan dessa stationer en jordad koppartråd med 10 mm² sektionsyta anbragt cirka 8 meter öfver jord på de stolpar, på hvilka försöksbanans egna telefonledningar äro uppsatta.

I.

Mätningar å »försökstråden».

Mätningarne utfördes den $^7/_2$ 08.

Denna tråd bestod af en 3 mm järntråd om 100 meters längd, medelst isolatorer fästad vid trenne stänger af trä. Mätningarne utfördes i närheten af Värtans station på ett ställe, där banvallen var i jämnhöjd med marken omkring, och där inga träd funnos i närmaste omgifningen. Mätningarne afsågo att bestämma det elektriska fält, som uppstår i närheten af kontakttråden; fördenskull uppmättes medelst statisk voltmeter spänningsskillnaden mellan försökstråden och jord på olika höjd öfver marken och olika afstånd från kontakttråden.

I det följande beteckna vi förhållandet mellan inducerad och inducerande spänning med ε. De första mätningarne utfördes utan, de senare med jordtråden på stolparne.

Följande resultat erhöllos:

	horisontalafstånd	*höjd öfver marken*	*spänning i kontakttråd*	ε
Utan jordtråd	4 meter	5 meter	7200 volt	0,104
» »	4 »	5 »	9240 »	0,121
» »	4 »	5 »	12460 »	0,116
» »	3 »	5,5 »	7600 »	0,140
» »	8 »	5,5 »	12500 »	0,052
» »	5,5 »	0,5 »	12500 »	0,0057
Med »	3 »	5,5 »	7600 »	0,109

Beräkningar med formlerna (30), (31) och (34) lämna följande värden:

	horisontalafstånd	*höjd öfver marken*	ε
Utan jordtråd	4 meter	5 meter	0,130
» »	3 »	5,5 »	0,170
» »	8 »	5,5 »	0,070
» »	5,5 »	0,5 »	0,018
Med »	3 »	5,5 »	0,142

Vi se, att de uppmätta värdena äro cirka 17 % lägre än de beräknade utom vid mätningen med 0,5 meters höjd, där differensen är betydligt större. Detta senare beror delvis på att mätningarne med tråden så nära ytan måste bli synnerligen osäkra och dels därpå att försökstråden var lagd nära ett stängsel af järntrådar.

Som marken var jämn, kan den olikhet, som konstaterats, endast förklaras af de reglar och stolpar, som bilda kontakttrådens upphängningsanordning. Klart är, att dessa skola taga åt sig en del af kontakttrådens statiska fältlinjer och å andra sidan något inverka på kapaciteten. Man skulle kunna tänka sig dessa störande inverkningar representeras af en jordad tråd, fästad öfver kontakttråden. Om vi använda de nyss nämnda formelsystemen under denna förutsättning och begagna de värden, som erhöllos för 3 meters afstånd från kontakttråden, få vi, att reglar etc. kunna ersättas med en 1 mm tråd fästad 1 meter öfver kontakttråden. Om vi nämligen utföra beräkningarne under dessa förutsättningar, erhålles:

	Horisontalafstånd	*Höjd öfver marken*	ε
Utan jordtråd	4 meter	5 meter	0,117
» »	3 »	5,5 »	0,139
» »	8 »	5,5 »	0,0525
Med »	3 »	5,5 »	0,111

Öfverensstämmelsen ligger tydligen inom försöksfelens område.

II.

Mätningar å försöksbanans telefonledning mellan Tomteboda och Värtan.

Denna telefonledning är en högspänningsisolerad dubbelledning af 3 mm järntråd, upphängd cirka 5,5 meter öfver marken på samma stolpar, som uppbära kontakttråden. I medeltal befinna sig de båda branscherna på 2,5 meters afstånd från kontakttråden, och afståndet mellan branscherna är 1 meter.

På denna ledning äro följande mätningar utförda:

$^{18}/_{4}$ 05. Medelst gnistmätning uppmättes spänningen i telefonledningen vid 21000 volts kontaktspänning. Erhållen spänning var 4500 volt. Vi få alltså:

$$\varepsilon = 0{,}214.$$

Ledningarne voro brutna vid Albano.

$^{18}/_{5}$ 05. Laddningsströmmen från telefonledningen till jord uppmättes. Därvid voro båda branscherna förenade med hvarandra. Följande mätningsresultat erhöllos:

Kontakttrådsspänning	*Urladdningsström per 1000 volt*
17000 volt	1,53 ma
22500 »	1,63 »
26000 »	1,57 »

$^{21}/_{12}$ 05. Spänningen i telefonledningens ena bransch uppmättes, dels då den andra branschen var isolerad och dels då den var jordförbunden. I förra fallet erhölls:

$$\varepsilon = 0{,}157;$$

i senare:

$$\varepsilon = 0{,}115.$$

$^{10}/_{4}$ 06. Samma mätning utfördes och erhölls förhållandet mellan spänningarne i telefonledningens ena bransch och kontaktledningen, när den andra branschen var isolerad:

$$\varepsilon = 0{,}177;$$

och när andra branschen var jordförbunden:

$$\varepsilon = 0{,}132.$$

Därefter bröts kontaktledningen i Albano, så att telefonledningen endast utefter en del af sin längd utsattes för induktion. Spänningsförhållandet blef då:

$$\varepsilon = 0{,}120;$$

när vidare den andra branschen jordades:

$$\varepsilon = 0{,}088.$$

Vi öfvergå nu till att jämföra dessa vid mätningar erhållna värden med dem, som beräkningar lämna.

Vi ha då först att taga i betraktande ledningen mellan Tomteboda och Albano. Vid gnistmätning erhölls

$$\varepsilon = 0{,}214$$

Om vi reducera mätningen af den $^{10}/_{4}$ 06, när kontaktledningen var bruten i Albano, i förhållande efter telefonledningens längd (kapacitet), erhålles:

$$\varepsilon = 0{,}210$$

Dessa båda mätningar stämma väl öfverens. Om vi däremot utföra en beräkning med tillhjälp af våra formler (30—34) samt med iakttagande af inverkan från reglar etc. genom att 1 meter öfver bärlinan (hvars inverkan äfven medtages i räkningen) placera en 1 mm jordad ledning, få vi:

$$\varepsilon' = 0{,}250$$

Bärtråden ökar kontakttrådens kapacitet med 33 % och ökar sålunda ε i samma proportion. Beräkningarne lämna sålunda ett värde, som är 19 % för högt. Enda förklaringen till denna afvikelse är att jordytan är långt ifrån plan såsom formlerna fordra (här och där förekomma skärningar). Kapaciteten pr km erhålles ur formeln (22)

$$c' = 0{,}0066 \text{ mf}$$

Om vi beräkna ε för sträckan Albano—Värtan med iakttagande af inverkan från den jordade tråden och den fiktiva 1 mms tråd, som ersätter reglar etc, få vi för denna sträcka:

$$\varepsilon'' = 0{,}134$$

Kapaciteten pr km för telefonledningens ena bransch erhålles

$$c'' = 0{,}00666$$

Kapaciteten pr km för de båda delarne af linjen Tomteboda—Värtan blir i det närmaste densamma, Medelvärdet på ε erhålles därför ur formeln

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon' l' + \varepsilon'' l''}{l' + l''}$$

där l' är afståndet mellan Tomteboda och Albano samt l'' mellan Albano och Värtan. För ε erhålles då:

$$\varepsilon = 0{,}201$$

Under förutsättning att omgifningarne inverka lika på hela sträckan, skulle en mätning lämna:

$$\varepsilon = \frac{0{,}201}{0{,}250} \cdot 0{,}214 = 0{,}170$$

vid mätningen den $^{10}/_{4}$ 06 erhölls

$$\varepsilon = 0{,}177$$

vid mätningen den $^{21}/_{12}$ 05:

$$\varepsilon = 0{,}157$$

Det sista värdet torde vara felaktigt.

I det följande skola vi icke taga med i beräkning inverkan af den fiktiva 1 mm tråden, då ingen korrektion göres för de öfriga störande inverkningarne.

Vi öfvergå nu till mätningarne af spänningarne hos ena branschen, då den andra var jordad. Om vi jämföra spänningarne, som erhöllos, då branschen var jordad, med den, som erhölls då densamma var isolerad, få vi förhållandet:

$^{21}/_{12}$ 05	0,732
$^{10}/_{4}$ 06	0,745
$^{10}/_{4}$ 06	0,733

Öfverensstämmelsen mellan mätningarne är sålunda god. En jordad tråd på 1 meters afstånd sänker sålunda spänningen i medeltal till

$$0{,}737$$

eller i rundt tal med 26 %.

Om vi utföra beräkningarne för motsvarande fall få vi följande värden:

Tomteboda—Albano	0,765
Albano—Värtan	0,780
Tomteboda—Värtan	0,77
Alltså i medeltal	0,77

I verkligheten sjunker spänningen alltså något mer än enligt beräkning. Såsom vi senare skola se, är förhållandet det, att om flere jordade trådar befinna sig i närheten af en isolerad, sänker den första jordade tråden spänningen i högre grad än den efterföljande, beroende därpå att på grund af laddningarnes repellerande inverkan på hvarandra totala laddningen på de jordade trådarne tilltager långsammare än ledningarnes antal växer. Häraf är klart, att, då ju i förhållande till våra formler, som kräfva plan jordyta, den isolerade tråden redan innan den andra branschen blifvit jordad, kan anses hafva en jordad ledare i sin närhet, sänkningen blir mindre än den beräknade.

Vi öfvergå nu till mätningen af urladdningsströmmen.

Om vi beräkna kapaciteten hos dubbelledningen medelst formelsystem (33) med korrektion för jordtråden mellan Albano och Värtan, få vi:

Kapacitetet	pr km	Tomteboda—Albano	0,0104	mf
»	»	» Albano—Värtan	0,0106	»

Totala kapaciteten blir därför:

$$C = 0{,}0489 \text{ mf}$$

Den kapacitet, som ledningen vid mätningstillfället hade, erhålles ur formeln

$$s = \varepsilon \omega C$$

där s är urladdningsströmmen i milliampère pr 1,000 volt, $\omega = 2\pi n$, $n = 26$ perioder. I medeltal erhölls en laddningsström af 1,57 ma. Om vi såsom värde på ε godtager $\varepsilon = 0{,}177$ skulle vi få:

$$C = 0{,}0544 \text{ mf}.$$

Denna kapacitet är sålunda 10 % större än den, som en beräkning med våra formler lämnar.

III.

Mätningar å telefonledningarne Tomteboda—Albano.

Mellan Tomteboda och Albano voro fyra 3 mm kopparledningar upplagda till en fyrskruf på telegrafverkets stolpar. Sidan i fyrskrufven var 0,4 meter och fyrskrufvens höjd öfver marken omkring 4 meter. Afståndet mellan kontaktledningen och fyrskrufven är mycket varierande. Om man undantager ett litet stycke strax vid Tomteboda, torde medelafståndet mellan Tomteboda och Nortulls station vara cirka 15 meter, mellan Norrtulls station och Norrtullsgatan cirka 10 meter och på den återstående sträckan 5 meter. Man kan approximativt räkna med att endast den del af ledningen, som går på 5 meters afstånd, är utsatt för induktion.

Mätning $^8/_{12}$ *05.* Först uppmättes isolationen hos trådarne och befanns vara i medeltal 107 megohm pr km.

Därefter uppmättes spänningen mellan telefontrådarne och skenorna. Vid denna mätning erhölls

$$\varepsilon = 0{,}0197$$

Samma spänning uppmättes, när de öfriga tre ledarne ställdes till jord. Mätningarne lämnade följande värden:

När de tre öfriga voro isolerade	$\varepsilon = 0{,}0245$
» en ledare var jordad	$\varepsilon = 0{,}0190$
» två » voro jordade	$\varepsilon = 0{,}0150$
» tre » » »	$\varepsilon = 0{,}0132$

Under denna mätning var försöksbanans telefonledning, som ligger mellan kontakttråden och telefontrådarne, isolerad. Sedan denna telefonledning blifvit jordad, sjönko värdena till följande belopp:

När de tre öfriga voro isolerade	$\varepsilon = 0{,}0197$
» en ledare var jordad	$\varepsilon = 0{,}0154$
» två » voro jordade	$\varepsilon = 0{,}0123$
» tre » » »	$\varepsilon = 0{,}0111$

För att undersöka, hvilken inverkan en afledning skulle åstadkomma på inducerade spänningen, inkopplades mellan en af ledarne och jorden reostatmotstånd om resp. 100,000, 80,000, 60,000 och 40,000 ohm. Därvid voro de tre andra ledarne isolerade. Följande värden på ε erhöllos

Inkoppladt motstånd	ε
100,000 ohm	0,0071
80,000 »	0,00555
60,000 »	0,0042
40,000 »	0,0025

Mätning $^8/_{12}$ *05.* Alla fyra telefontrådarne hopkopplades och laddningsströmmen till jord uppmättes.

Vid 24,000 volts spänning erhölls en laddningsström af 3,4 milliampère.

När vi hafva flera jordade ledningar i närheten af den, på hvilken mätningarne utföras, bli beräkningarne mycket komplicerade. Emellertid kunna vi finna en enkel lösning i det fall, att trådarne, som äro jordade, ligga så långt från kontakttråden i förhållande till hvarandra, att de kunna anses upptaga lika stora laddningar.

Om vi inskränka oss till två jordade ledningar och beteckna dem med 2 o. 3 samt deras laddning per km med q och i öfrigt använda samma beteckningar som förut, få vi ekvationssystemet:

$$\left\{\begin{aligned} v_0 &= k_0\, q_0 + k_{01}q_1 + (k_{02} + k_{03})\, q \\ v_1 &= k_{01}q_0 + k_1\, q_1 + (k_{12} + k_{13})\, q \\ 0 &= k_{02}q_0 + k_{12}q_1 + (k_2 + k_{23})\, q \\ 0 &= k_{03}q_0 + k_{13}q_1 + (k_3 + k_{23})\, q \end{aligned}\right.$$

Vi införa

$$\frac{k_{02}+k_{03}}{2}=k'_{02}$$

$$\frac{k_{12}+k_{13}}{2}=k'_{12}$$

$$\frac{k_2+k_3+2k_{23}}{4}=k'_2$$

$$2q \quad = q'_2$$

Genom att addera de två sista ekvationerna få vi systemet:

$$\begin{cases} v_0 = k_0\, q_0 + k_{01}\, q_1 + k'_{02} q'_2 \\ v_1 = k_{01}\, q_0 + k_1\, q_1 + k'_{12} q'_2 \\ 0 = k'_{02} q_0 + k'_{12} q_1 + k'_2\, q'_2 \end{cases}$$

Alltså samma ekvationssystem som för en jordad ledare.

Om vi haft n stycken i stället för två, hade enda skillnaden blifvit att vi fått sätta

$$\frac{\Sigma k_{0i}}{n}=k'_{02}$$

$$\frac{\Sigma k_{1i}}{n}=k'_{12}$$

$$\frac{\Sigma k_i+\Sigma k_{ij}}{n^2}=k'_2$$

$$nq \quad = q'_2$$

$$i=2\ldots n;\ j=2\ldots n$$

Vi se alltså, att alla de jordade ledarne kunna anses såsom en enda ledare, blott vi införa nya konstanter.

För t. ex. k_{0i} hafva vi uttrycket

$$k_{0i}=18 \log \frac{t_i}{d_i}\,.\,10^6$$

alltså:

$$k'_{02}=18 \log \frac{\sqrt[n]{t_2\ldots\ldots t_n}}{\sqrt[n]{d_2\ldots\ldots d_n}}\,.\,10^6$$

Liknande formler få vi för de öfriga uttrycken. Vi se alltså, att vi få exakt samma formler för en hel del jordade ledare genom att utbyta afståndet mot det geometriska mediet mellan afstånden. För en ledares afstånd till sig själf ha vi att sätta dess radie. Om ledarne ligga på ungefär samma afstånd från kontakttråden och den ledare, för hvilken ε och c skola beräknas, se vi af formlerna, att k'_{02} och k'_{12} variera högst obetydligt; däremot varierar k'_2 desto mer. Emellertid är denna variation störst vid ökningen från en till två ledare, ökningen blir sedan mindre och mindre. Af formlerna (34) framgår, att då k_{01} vanligen är liten i förhållande till K_1, blir ändringen i ε på grund af jordade ledare större än ändringen i kapacitet.

Om vi tillämpa dessa formler på försöken, få vi med antagande, att halfva ledningen påverkas:

Ingen jordad tråd	$\varepsilon = 0{,}056$
en » »	$\varepsilon = 0{,}038$
två jordade trådar	$\varepsilon = 0{,}030$
tre » »	$\varepsilon = 0{,}023$

Vi se här, att vi få ungefär dubbelt så stora värden som de uppmätta. Förklaringen härtill ligger däri att på samma stolplinje tvenne telegrafledningar äro upplagda, en på 0,5 meters afstånd från fyrskrufven och den andra på cirka 1,5 meters afstånd från densamma. Den ena af dessa ligger således ungefär på samma afstånd från fyrskrufvens trådar, som den första jordade ledningen, och bör därför hafva samma inverkan. Genom ensamt denna tråds inverkan se vi alltså, att värdet på ε, när de tre öfriga trådarne äro isolerade, skulle sjunka till 0,038. Den andra telegrafledningen sänker sedan värdet ytterligare, hvarigenom vi komma till samma storleksordning som de uppmätta värdena. Några exakta räkningar torde icke vara skäl att utföra, då redan antagandet, att halfva ledningen är utsatt för induktion, är osäker.

Vi öfvergå därför till spänningens sänkning genom anbringande af en afledning. Om η är afledningens motstånd, ε värdet, när ingen afledning är för handen, c_1 kapaciteten per km och l ledningens längd, få vi ε' efter afledningens inkoppling enligt formeln

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1 + \frac{1}{i\eta\omega c_1 l}}$$

Om vi för ε insätter det uppmätta värdet 0,0245, få vi följande spänningar

Inkoppladt motstånd	*beräknadt* ε	*uppmätt* ε
100,000 ohm	0,00675	0,0071
80,000 »	0,0055	0,00555
60,000 »	0,00416	0,0042
40,000 »	0,00277	0,0025

Öfverensstämmelsen är sålunda ganska god.

IV.

Mätningar å försöksbanans telefonledning till Järfva.

Denna telefonledning följer kontaktledningen på varierande afstånd mellan 7 till 10 meter. På samma stolpar äro 14 stycken telegrafledningar framdragna.

Mätning 28/4 *06.*

För ena branschen:	$\varepsilon = 0{,}00925$
» andra »	$\varepsilon = 0{,}0138$

Med antagande af 4 meter öfver marken och 8 meter från kontaktledningen skulle vi få:

$$\varepsilon = 0{,}05.$$

Om vi på sätt som förut blifvit nämndt korrigera för de 14 telegrafledningarne, erhålles:

$$\varepsilon = 0{,}0082.$$

Beräkningen är naturligtvis i detta fall osäker.

V.

22/3 1906. Mätningar af spänningen utfördes å telegrafverkets telefonledningar, som följa försöksbanan från Tomteboda till Järfva. Därvid valdes en ledning n:r 2,006, som stannar i Järfva. Mellan Tomteboda och Stockholms Central går denna ledning i kabel. Det uppmätta värdet på ε var 0,0016.

VI.

Utom dessa mätningar hafva iakttagelser gjorts angående de störningar i telegraf- och telefontrafiken, som åstadkommits af den elektriska driften. Hvad först beträffar telegraftrafiken, visade sig redan vid försökens början, att svårigheter uppstodo för telegrafering på järnvägens egen omnibuslinje Stockholm—Tomteboda—Värtan. Vid närmare undersökning visade sig dessa störningar bestå dels i elektromagnetisk induktion och dels i strömmar, beroende på spänningsskillnader i jorden. Den på grund af elektromagnetisk induktion inducerade spänningen var 26 volt per 100 ampère i kontaktledningen. Spänningen mellan jordplåtarne i Tomteboda och Värtan befanns för samma strömstyrka vara 76 volt. Någon telegraferingen störande statisk induktion erhölls icke. Dock kunde en svag surrning iakttagas på telegrafapparaterna, då dessa voro känsligt ställda och spänningen uppgick till 20000 volt.

Vidare visade sig, att, när strömstyrkan i kontaktledningen öfversteg 80 ampère, stördes telegraferingen å ledningarne mellan Stockholm och Nystad. Dessa telegrafledningar voro upplagda på samma stolpar, som försökstrådarne Tomteboda—Albano. Telegrafledningarne flyttades därför, så att de endast korsade kontaktledningen på ett ställe och hafva senare inga störningar inträffat.

Hvad inverkan på telefonledningarne beträffar, hafva dessa visat sig obetydliga. Endast svaga, telefoneringen ej störande ljud hafva å telefoncentralen förmärkts vid tågens igångsättning. Vid försök ute på linjen vid Järfva station kunde äfven den normala växelströmmens ljud förmärkas. Att störningarne varit så små, torde förklaras dels af kontaktledningens ringa längd och dels af omsorgsfullt utförd byggnad af telefonlinjerna.

De uppmätta och de beräknade värdena stämma enligt hvad ofvan framhållits ganska väl med hvarandra. De värden på konstanterna, som erhållits på försöksbanan, torde därför kunna direkt användas i formlerna för långa bansträckor, hvarigenom en beräkning af de induktionsförhållanden, som då uppstå, möjliggöras.

H. PLEIJEL.